Конспект лекцій

з навчальної дисципліни

«Онови технічної механіки»

Для спеціалізації

184.02 «Підземна розробка корисних копалин»

Заняття №1

Тема: Основні поняття і аксіоми статики.

1. ***Вид заняття : лекція***
2. ***Мета: Засвоєння основних понять, аксіом та розділів технічної механіки.***
3. ***Теоретичний матеріал:***

3.1 *Механічний рух*
3.2 *Матеріальна точка*
3.3 *Абсолютне тверде тіло*
3.4 *Сила. Система сил.*
3.5 *Рівнодійна і зрівноважуючи сила*
3.6 *Аксіоми статики*
3.7 *В'язі. Реакції ідеальних в'язів*

4. ***Закріплення матеріалу***

Питання фронтального опитування студентів:
4.1 *Що називають механічним рухом?*
4.2 *В якому випадку тіло може бути розглянуто як матеріальна точка?*
4.3 *Яке тіло називають абсолютно твердим?*
4.4 *Що називається системою сил?*
4.5 *Яка система сил називається плоскою?*
4.6 *Яка система сил називається просторовою?*
4.7 *Яку силу називають рівнодіючою системи сил?*
4.8 *Закон інерції.*
4.9 *Види в'язів?*

5. ***Література:***

М.С.Мовнин, А.Б.Израелит «Основы технической механики», 1979 - с.5-с. 12

6. ***Зміст теоретичної частини***

6.1 Основні поняття

Механіка *- це наука, у якій вивчаються загальні закони механічного руху і механічної взаємодії матеріальних тіл.*

Механічним рухом *називають зміну положення матеріального тіла у просторі, що відбувається в часі.*

Статика *- це розділ механіки, у якому вивчаються методи перетворення систем сил у еквівалентні системи, а також обґрунтовуються умови рівноваги твердих тіл під дією прикладених до них сил.*

Приступаючи до вивчення статики треба надати означення основних понять механіки, які зустрічаються у даному розділі.

Реальні предмети, з якими стикається людина у повсякденній діяльності, мають різноманітніші форми і розміри, а матеріали, з яких ці предмети створені, мають різні властивості. Під дією навантажень матеріальні тіла змінюють свою форму (деформуються). Однак для наочності та спрощення розв'язування задач статики користуються простими моделями матеріальних тіл, такими як ***матеріальна точка*** *і* ***абсолютно тверде тіло.***

Матеріальна точка - *це геометрична точка, у якій зосереджена маса усього тіла.*

Як матеріальні точки розглядають не лише дуже малі, а й великі тіла, розмірами яких під час розв'язування задач можна знехтувати.

Абсолютно твердим *або просто* ***твердим тілом,*** *називають систему незмінно зв'язаних між собою матеріальних точок.*

Відстані між двома будь-якими точками абсолютно твердого тіла є сталими.

Одним із найважливіших понять механіки є поняття сили.

Сила - *це міра механічної взаємодії матеріальних тіл.*

Сила є векторною величиною і визначається:

1) ***абсолютним значенням, або модулем;***
2) ***напрямом дії;***
3) ***точкою прикладання.***

Пряма, вдовж якої прикладена сила називається ***лінією дії сили.*** *За одиницю сили у Міжнародної системи одиниць СІ прийнято ньютон (Н).*

Приклади зображення векторів сил подано на рис. Сила Я прикладена у точці А, а сила ***Р*** *-у точці* ***В.*** *Потоншеними лініями зображено лінії дії сил.*

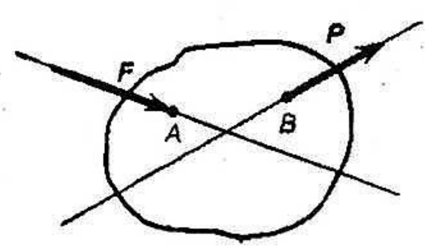


Рис.1

Для того, щоб відрізнити векторні величини від скалярних, їх позначають звичайними літерами з рисками зверху або літерами жирного шрифту. На схемах риски іноді риски упускають, оскільки зображення векторів стрілками свідчить про характер фізичної величини.

Сукупність декількох сил, що діють на дане тіло, називається ***системою*** *сил.*

*Система сил , під дією кожної з яких тіло перебуває в одноковому стані (у русі певного характеру або в стані покою), називається **еквівалентними системами** сил.*

*Сила, еквівалентна деякій системі сил, називається **рівнодійною** даної системи.*

*Система сил, рівнодійна якої дорівнює нулю, називається **зрівноваженою.***

*Сила, що у сукупності з рівнодійною утворює зрівноважену систему, називається **зрівноваженою** силою.*

6.2 Аксіоми статики.

Статика ґрунтується на аксіомах, тобто твердження, що приймаються без доведення, сформульованих на основі досвіду спостереження явищ природи.

***Перша аксіома (аксіома інерції).** Система **сил**, прикладених до матеріальної точки, є зрівноваженою, якщо під дією даної системи точка перебуває в стані спокою або рівномірного прямолінійного руху.*

***Друга аксіома (аксіома про рівновагу двох сил).** Дві сили, прикладені до абсолютно твердого тіла, що є рівними за абсолютними величинами і направленими вздовж однієї прямої у протилежні боки, взаємно зрівноважуються, (рис 2а)*

***Третя аксіома (аксіома про додавання або віднімання зрівноваженої системи сил)** Кінематичний стан абсолютно твердого тіла не порушиться, якщо до даного тіла прикласти або відкинути прикладену до нього зрівноважену систему сил.*

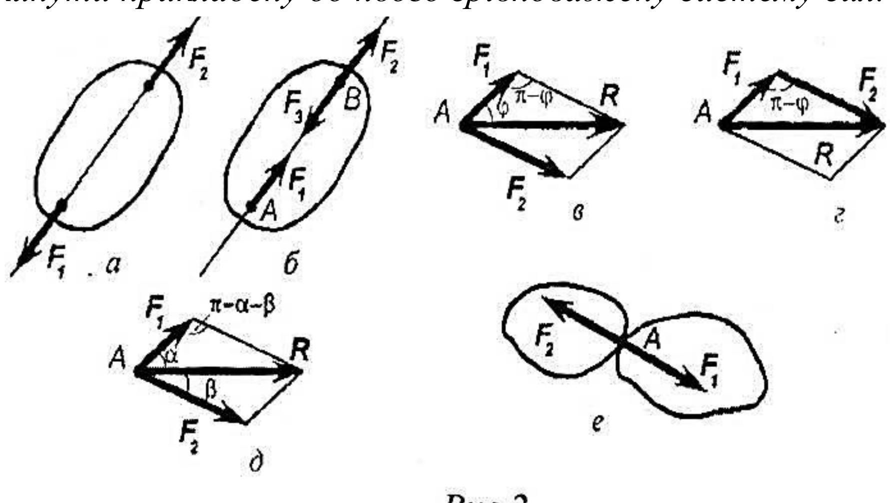


Рис.2

Із другої і третьої аксіоми випливає наслідок, згідно з яким будь-яку силу, що діє на абсолютно тверде тіло, можна перенести уздовж лінії дії в будь-яку точку, не порушивши при цьому кінематичного стану тіла.

*Нехай на тіло у точці **A** діє сила $\boldsymbol{F}_1$ (рис. 26). У точці **B**, що знаходиться на лінії дії сили $\boldsymbol{F}_1$прикладемо сили $\boldsymbol{F}_2$ і $\boldsymbol{F}_3$, рівні за модулем силі $\boldsymbol{F}_1$ і направлені в протилежні боки. Кінематичний стан тіла при цьому не порушиться. Рівні за модулем і протилежно направлені сили $\boldsymbol{F}_2$ і $\boldsymbol{F}_3$, можна відкинути. Отже силу $\boldsymbol{F}_1$ можна замінити рівною їй за абсолютною величиною силою $\boldsymbol{F}_2$ шляхом перенесення вектора сили $\boldsymbol{F}_1$ уздовж лінії, з* *точки **A** у довільно вибрану точку **B**.*

*Оскільки вектор сили можна переносити уздовж лінії дії , його називають **ковзним** вектором.*

***Четверта аксіома (аксіома про додавання двох сил).** Рівнодійна двох сил, прикладених в одній точці, прикладена у тій самій точці і зображується діагоналлю паралелограм, дві суміжні сторони якого збігаються з відрізками, котрими зображуються вектори сил.*

*Цю аксіому називають **правилом паралелограма сил.***

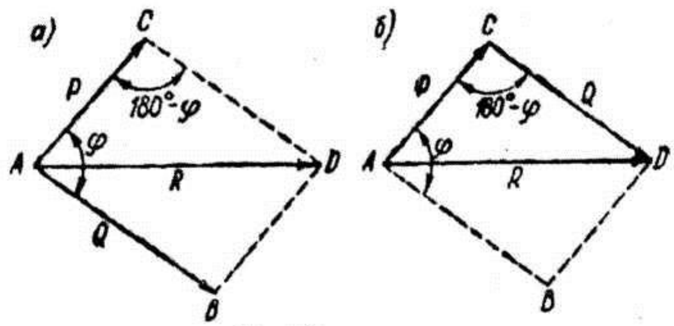


Рис.3

*Рівнодійна **R** прикладена у точці **A** сил **P** і **Q** може бути знайдена шляхом побудови <u>паралелограма</u> (рис. 3а) або <u>трикутника</u> (рис. 3б).*

*Сила **P** і **Q,** є векторною або геометричною сумою векторів сил **P** і **Q,** тобто:*

$$\boldsymbol{R=P+Q}$$

Модуль рівнодійної визначається формулою за теоремою косинусів:

$$R = \sqrt{Q^2 + P^2 + 2QPcos\varphi}$$

*Згідно з аксіомою сили **P** і Q можна замінити однією силою R, та навпаки силу **R** - прикладеними у точці A силами **P** і* **Q**.

***П'ята аксіома (аксіома про рівність дії і протидії).** Будь-якій дії одного матеріального тіла на інше відповідає рівна за абсолютною величиною і протилежно направлена протидія.*

У природі не існує односторонньої дії одного матеріального тіла на інше. Незважаючи на рівність модулів та протилежну направленість сил дії і протидії, ці сили зрівноважують одна одну, оскільки вони прикладені до різних тіл.

6.3 В'язі та їх реакції. Аксіома в'язів.

*Тіло, переміщення якого у просторі не обмежується іншими тілами, називається **вільним.***

*Якщо інші тіла чинять перешкоди для руху даного тіла в одному чи декількох напрямах, то такі тіла називаються **пов'язаними.***

*Тіла, що обмежують рух даного тіла у просторі, називаються **в'язами.***

*Сили, що діють з боку в'язей, називаються **реакціями в'язей.***

Основні типи в'язей:

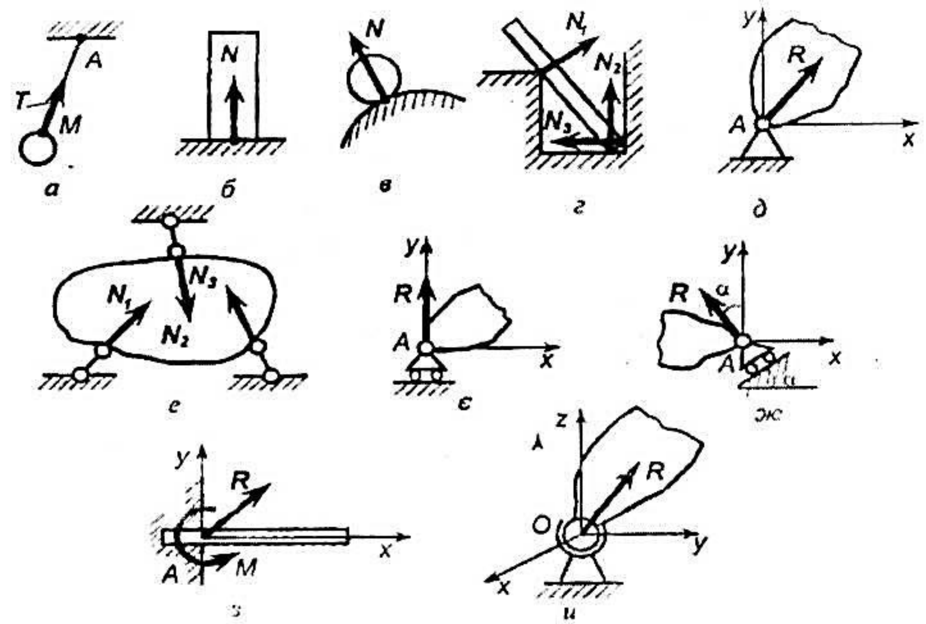


Рис. 4

1. Нитка (трос) не дає можливості віддалитися точці М тіла від точки А закріплення цієї нитки до основи. Реакція такої в'язі ***T*** *направлена уздовж нитки до точки підвісу, (рис.4а).*

2. Ідеальна гладка поверхня обмежує рух тіла у напрямі, перпендикулярному до поверхні. У тому самому напрямі діє реакція ***N*** *в'язі (рис. 4 б-г).*

3. Нерухомий циліндричний шарнір (підшипник) утворюється, наприклад, коли дане тіло жорстко з'єднане із циліндричною втулкою, надітою на нерухомий циліндричний стержень. Стержень обмежує рух втулки у будь-якому напрямку, перпендикулярному до його осі. Реакція в'язі ***R*** *розташована у площині х, у дозволеного повороту тіла відносно*

т. А. (рис 4 д)

4. Ідеальний стержень, тобто невагомий прямий стержень з шарнірами на кінцях виключає переміщення центра шарніра, яким з'єднаний стержень з тілом, у напрямі осі стержня. У тому самому напрямі дії реакція в'язі На рис 4 е реакції ідеальних стержнів позначено N1, N2, N3.

5. Рухомий циліндричний шарнір утворюється невагомою опорою, шарнірно з'єднаною з тілом і встановленою на основі з можливість переміщення без тертя у певному напрямку (рис 4 є,ж). Реакція ***R*** *в'язі направлена перпендикулярно до напрямку можливого переміщення опори.*

6. Нерухоме защемлення стержня виключає поступальні переміщення даного *тіла у напрямках осей x і y, а також обертальний рух у площині x,y. Його реакціями є сила **R** і момент **M** (рис.4з). Фізична суть моменту буде розглянуто пізніше.*

*Сферичний шарнір забороняє кулі, з якою абсолютно жорстко зв'язане тіло, переміщуватися у всіх трьох напрямках простору, але дозволяє обертатися тілу навколо осей x,y,x. Реакцією такої в'язі є сила **R**, лінія дії якої проходить через точку A, а напрям може бути довільним.*

Усі сили, що діють на пов'язане абсолютно тверде тіло, можна поділити на активні (задані) сили і реакції в'язей. Одним із основних положень механіки є принцип звільнення твердих тіл від в'язей, згідно з яким будь-яке пов'язане тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути в'язі, замінивши їх дію реакціями в'язей.

.

Заняття №2

1. ***Тема «Плоска система збіжних сил»***
2. ***Вид заняття: лекція***
3. ***Мета: Засвоєння теоретичного матеріалу нової теми та оволодіння навичками застосовування отриманих знань для розв'язання практичних задач.***
4. ***Теоретичний матеріал лекції***
   4.1 *Система збіжних сил*
   4.2 *Визначення рівнодіючої збіжної системи сіп*
   4.3 *Додавання плоскої системи збіжних сил Силовий багатокутник*
   4.4 *Проекція сили на вісь, правило знаків.*
   4.5 Умови рівноваги збіжної системи сил.

5. ***Закріплення теоретичних знань***
   Питання фронтального опитування студентів:
   5.1 *Яка система сил називається збіжною?*
   5.2 *Як визначити рівнодіючу збіжної системи сич ?*
   5.3 *У якому випадку збіжна система сил знаходиться в рівновазі? (умови рівноваги)?*
   5.4 *Як визначити методом силового багатокутника знаходиться чи ні система в рівновазі?*

6. ***Розв'язування задач***
7. ***Література:***
   М.С.Мовнин, А.Б.Израелит «Основи технической механики», 1979 - с. 13-.23
8. ***Зміст теоретичної частини***

8.1 Система збіжних сил.

Збіжними називаються сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці.

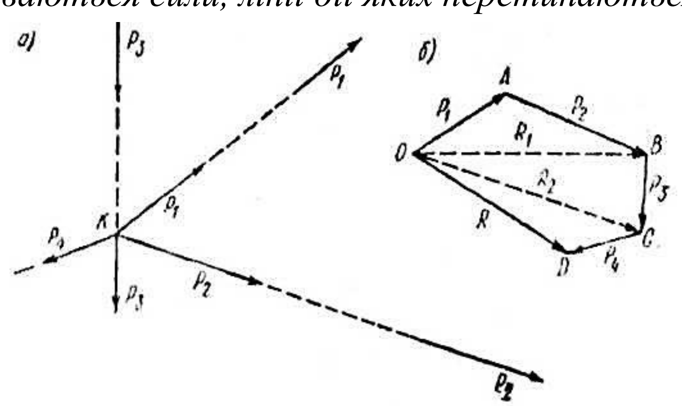


Рис.6

Розглянемо плоску систему збіжних сил. Приведена така система сил, лінії дії яких *перетинаються в однієї точці.*

Всі сили, згідно з другою та третьою аксіомами, можна перенести в т.О. перетину їх дій. Використовуючи правило трикутника складемо спочатку сили $\boldsymbol{P_1}$ ***і*** $\boldsymbol{P_3}$*. З'єднавши т.О. і кінець сили* $\boldsymbol{P_2}$ *отримаємо силу* $\boldsymbol{R_1}$ *- рівнодіючу сил* $\boldsymbol{P_1}$ ***і*** $\boldsymbol{P_2}$ *- З кінця сили* $\boldsymbol{R_1}$ *проведемо третю силу* $\boldsymbol{P_3}$ *та з'єднавши кінець сили* $\boldsymbol{P_3}$ *з точкою О отримаємо силу* $\boldsymbol{R_2}$ *- рівнодіючу сил* $\boldsymbol{R_1}$ *і* $\boldsymbol{P_3}$*. Таким же чином отримуємо силу* ***R*** *- рівнодіючу сил* $\boldsymbol{R_2}$ *і* $\boldsymbol{P_4}$ *Вектори* $\boldsymbol{R_1}$ *і* $\boldsymbol{R_2}$ *можна не будувати, а послідовно в указаному порідку з'єднати всі сили і початок першої та кінець останньої з'єднати.*

Фігура ОАВСД (рис **5)** *називається* ***силовим багатокутником.***

Вектор, поведений з точки прикладання першої сили в останню вершину побудованого многокутника, є рівнодійною ***Я.***

$$R = \sum_{i=1}^{n} F_1$$

Якщо остання вершина многокутника сил збігається з першою, то многокутник називається ***замкнутим.***

В цьому випадку рівно дійна дорівнює нулю:

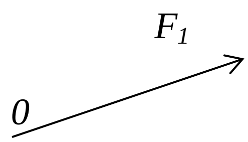
$$\boldsymbol{R = 0} \text{ або } \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F_1 = 0}$$

Замкнутість силового многокутника виражає умову рівноваги сил, прикладених *в* ***одній точці твердого тіла, в графічній формі.***

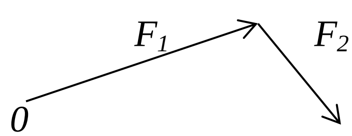
Приклад побудови багатокутника.

Побудова силового багатокутника для визначення чи є надана система сил зрівноваженою:

1. *З довільної точки 0 відкласти перший вектор сили* F_1

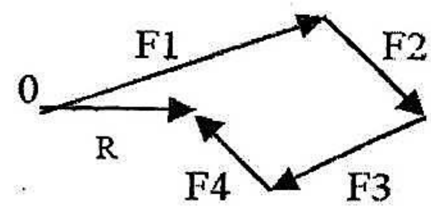


2. *З кінця першого вектора відкласти вектор другої сили* F_2



3. *З кінця другого вектора відкласти вектор третьої сили і т. д. Повторити операцію n - 1 разів*

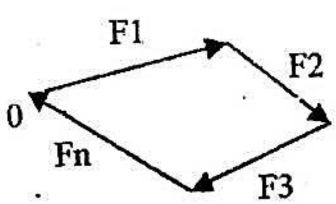
4. Направити вектор, що замикає від початку першого вектора (точка 0) до кінця останнього F_n

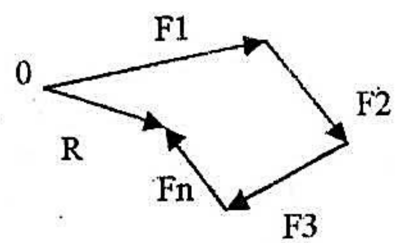


5. Визначити модуль і напрям рівнодійної:

а) при Я дорівнює 0 система сил урівноважена

б) при К не дорівнює 0 система сил не врівноважена





9. Зміст практичної частини

Розв'язання задачі.

За вихідними даними та наданою системою сил (рис. 7) визначити рівнодіючу силу графічним способом.

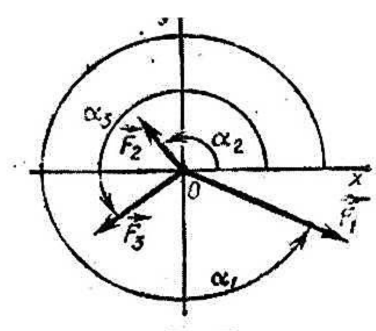


Рис7

$$F_1 = 2H, F_2 = 5H, F_3 = 4H, \alpha_2 = 280^o, \alpha_3 = 200^o$$

Заняття №3

1. ***Тема «Плоска система збіжних сил»***
2. ***Вид заняття: лекція***
3. ***Мета:*** **Набуття навичок застосування теоретичних знань для розв'язанні задач: знаходити проекції сил на вісь, знаходити рівнодіючу методом силового багатокутника..**
4. ***Теоретичний матеріал***

4.1 Проекція сили на вісь,

4.2 Правило знаків

4.3 Проекція векторної суми на вісь

5. ***Розв'язання задач***
6. ***Питання фронтального опитування студентів:***

6.1. Чому дорівнює проекція сили на вісь?

6.2. Чому дорівнює проекція рівнодіючої системи збіжних сил на вісь?

6.3. Умови рівноваги системи збіжних сил?

7. ***Література:***

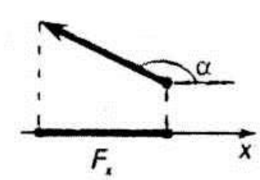
М.С.Мовнин, А.Б.Израелит «Основы технической механики», 1979 - с. 13-е.23

8. ***Зміст теоретичної частини***

Аналітичний метод розв'язання задач статики побудований на понятті про проекцію сили на вісь.

Проекція сили на вісь координат дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між силою і додатним напрямком осі.

Якщо цей кут гострий - проекція додатна, якщо кут тупий - від'ємна, а якщо сила перпендикулярна осі - її проекція дорівнює нулю:



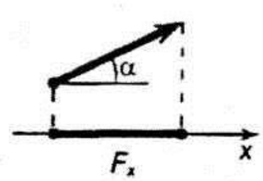


Рис.8

*Для розгляду плоскої системи сил скористаємося взаємно перпендикулярними осями x і y. у цьому випадку силу **F** можна розкласти на дві складові $\boldsymbol{F_x}$ і $\boldsymbol{F_y}$, направлені паралельно до відповідних осей, тобто:*

$$F = F_X + F_y$$

Проекції сил на осі x і y находять у вигляді:

$$F_x = F \cos a$$

$$F_y = F\cos\beta$$

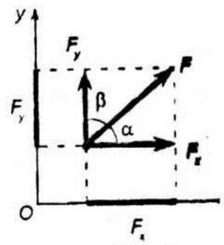


Рис.9

Якщо відомі проекції сил $\boldsymbol{F_x}$ *і* $\boldsymbol{F_y}$ *, її модуль і напрям визначаємо за формулами:*

$$\mathbf{F} = \sqrt{\mathbf{F_x^2} + \mathbf{F_y^2}}$$

$$\mathbf{cos\alpha} = \frac{\mathbf{F_x}}{\sqrt{\mathbf{F_x^2} + \mathbf{F_y^2}}}$$

$$\mathbf{cos\beta} = \frac{\mathbf{F_x}}{\sqrt{\mathbf{F_x^2} + \mathbf{F_y^2}}}$$

Для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил системи на осі декартових координат х тау дорівнювали нулю.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{yi} = 0$$

Метод розв'язання задач статики із застосуванням наданих рівнянь рівноваги називають ***аналітичним.***

Теорема про три сили:

Якщо тіло під дією трьох непаралельних сил знаходиться у стані рівноваги, то всі сили лежать в одній площині, а їх лінії дії перетинаються в **одній точці.**

За допомогою цієї теореми в деяких випадках можна визначити напрямок реакції нерухомого шарніра, не представляючи її в вигляді двох взаємно перпендикулярних складових. Наприклад, для балки АВ, яка закріплена в точці А і опирається в точці D на виступ (рис. 10), лінія дії реакції R_A *нерухомого шарніра буде проходити через центр шарніра та точку Е перетину сили Р ваги балки та реакції* N_D *гладенької поверхні*

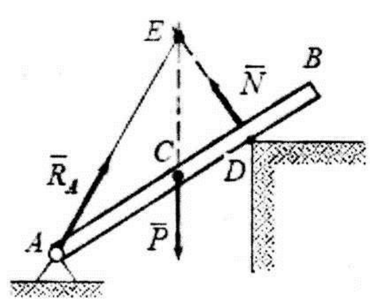


Рис.10

Методика розв'язування задач на рівновагу плоскої системи збіжних сил з використанням геометричної умови рівноваги

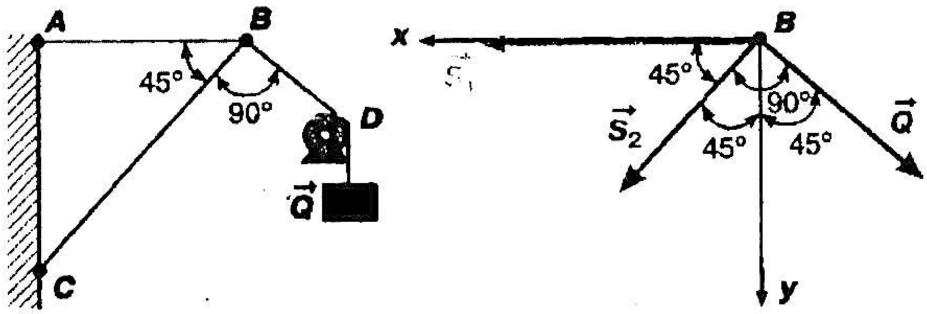


Рис.11

I. Виділяємо об'єкт рівноваги - тіло або точку, рівновагу якого потрібно розглянути у цій задачі.

2 Задані сили прикладаємо до виділеного об'єкта рівноваги.

3 Відкидаємо в'язі і замінюємо їх дію відповідними реакціями.

4 Вибираємо координатні осі і складаємо рівняння рівноваги.

5 Складені рівняння розв'язуємо відносно відомих величин.

9. Зміст практичної частини Приклад розв'язання задачі:

$F_1 = 28кН; F_2 = 42кН; \alpha, = 45°; \alpha_2 = 60°; \alpha_3 = 30°$.

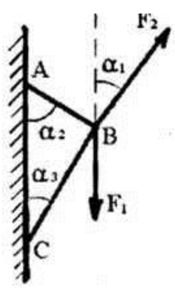


Рис. 12

Визначити зусилля S_A и S_C (рисунок 12).

Розв'язання задачі:

1) розглядає рівновагу точки В, в якій сходяться всі стрижи і і зовнішні сили (рис. 12);

2) відкидаємо зв'язку АВ і ВС, замінюючи їх зусилля у стрижнях S_A I S_C. Спрямування

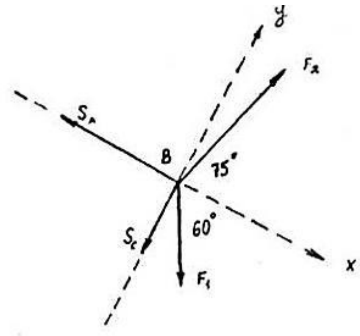


Рис. 13 – Схема дії сил у точці В

зусиль приймемо від вузла, припускаючи стержні розтягнуті. Виконаємо на окремому кресленні схему дії сил у точці в (рис. 13). Вибираємо систему координат таким чином, щоб одна з осей збіглася з невідомим зусиллям, наприклад з S_A.

3) Позначаємо на схемі кути, утворені діючими силами з віссю X і складаємо рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad F_2 \cdot cos75^o + F_1 \cdot cos60^o - S_A = 0$$

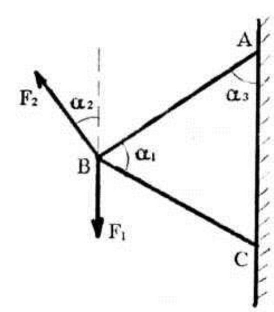
$$\sum F_{ix} = 0; \quad F_2 \cdot cos15^o + F_1 \cdot cos30^o - S_C = 0$$

З рівнянь визначаємо зусилля в стрижнях;

$$S_A = F_2 \cdot cos75^o + F_1 \cdot cos60^o = 42 \cdot 0{,}259 + 28 \cdot 0{,}5 = 24{,}88\text{кН}$$
$$S_A = F_2 \cdot cos15^o + F_1 \cdot cos30^o = 42 \cdot 0{,}966 + 28 \cdot 0{,}866 = 24{,}88\text{кН}$$

Знаки вказують, що обидва стержня розтягнуті.

Домашнє завдання : розв'язання задачі



F1 = 20кН; F2 = 20кН; α, = 60°; α2 = 60°; α_3 = 45°.

Заняття №4

1. ***Тема «Плоска система збіжних сил»***
2. ***Вид заняття: лекція***
3. ***Мета*: *Закріпити навички розв'язання задач на визначення рівнодіючої*** *для* ***плоскої системи збіжних сил графічним та аналітичним методом.***
4. ***Розв'язання задач.***

   4.1 Аналітичне визначення величин та напрямку рівнодіючої системи збіжних сил

5. ***Питання фронтального опитування студентів:***

   5.1 Умови рівноваги збіжної системи сил?

   5.2Рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил.

   5.3Визначення напрямку дії зусиль в стержневих системах.

   5.4Формули визначення проекції сили системи на вісь.

6. ***Література:***

   М.С.Мовнин, А.Б.Израелит «Основы технической механики», 1979 - с. 17-с. 18

7. ***Зміст практичної частини.***

Задача. 1

Визначити рівнодіючу для заданої системи графічним та аналітичним способом (рис. 14), якщо F_1=10кН, F_2=25кН, F_3=20кН, F_4= 5кН.; α_1= 60°, α_2=30° , α_3 =315^0, a_4=225°

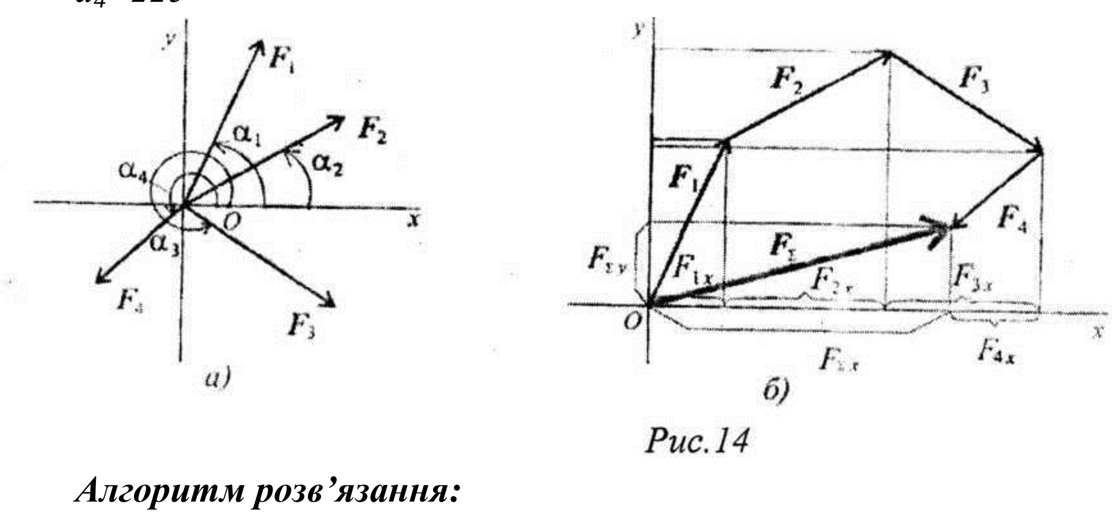
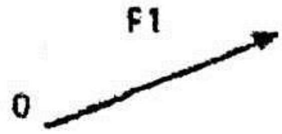


Рис.14

Алгоритм розв'язання:

1.Графічним способом

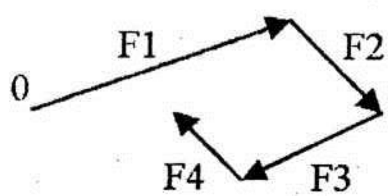
3) Побудова силового багатокутника для визначення чи є надана система сил зрівноваженою:



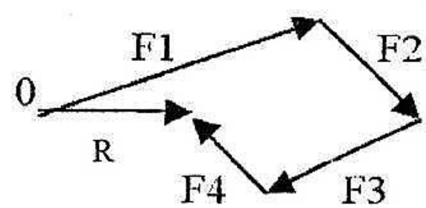
2) З довільної точки 0 відкласти перший вектор сили F_1

3)З кінця першого вектора відкласти вектор другої сили F_2

4) З кінця другого вектора відкласти вектор третьої сили і т. д. Повторити операцію n - 1 разів



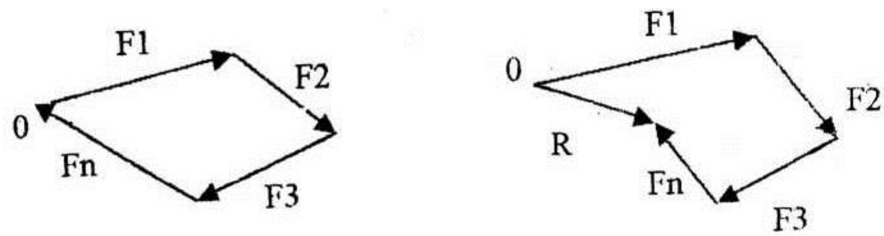
5)Направити вектор, що замикає від початку першого вектора (точка 0) до кінця останнього F_n



6). Визначити модуль і напрям рівнодійної:

а) при Я дорівнює 0 система сил урівноважена

б) при К не дорівнює 0 система сил не врівноважена



7. *Аналітичним способом*

1. *За наведеним прикладом побудувати силовий багатокутник і визначити рівнодіючу силу геометричним способом.*
2. *Обчислити аналітичним методом рівнодіючу*
3. $F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} - F_{4x}$ = 10 cos 60 + 25 cos 30 + 20 cos 45 - 5 cos 45 = 37,26
4. $F_y = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y} - F_{4y}$ = 10 cos 30 + 25 cos 60 - 20 cos 4 5 - 5 cos 45 = 3,48
5. $\boldsymbol{R} = \sqrt{\mathbf{Fx^2 + Fy^2}}$ $\quad \boldsymbol{R} = \sqrt{(\mathbf{F}_x)^2 + (\mathbf{F}_y)^2} = \sqrt{\mathbf{37,26^2 + 3,48^2}} = \mathbf{37,42}$

6. Виявити чи є врівноваженою задана система. - система сил не врівноважена

Задача 2.

Визначити рівнодіючу систему сил (рис. 15) аналітичним та графічним способом., використовуючи 4 аксіому статики

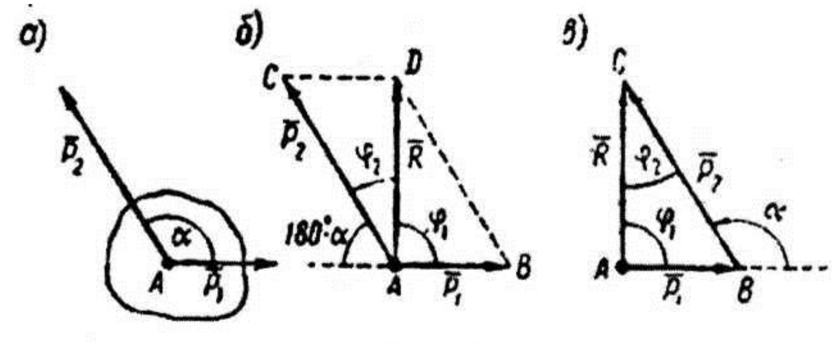


Рис.15

P_1=40Н, P_2=80Н, α=100°

Домашнє завдання: розв'язати здачу 1, змінивши данні:

F_1=10кН,

F_2=<u>№ за списком у журналі</u>

F_3=<u>№ за списком у журналі</u>

F_4= 5кН;

α_1= 30°, α_2=60°, α_3=300°, α_4=225°

Заняття №5

1. ***Тема «Плоска система збіжних сил»***
2. ***Вид заняття: лекція***
3. ***Мета: Набуття навичок розв'язання задач с використанням рівнянь рівноваги.***
4. ***Розв'язування задач з використанням рівнянь рівноваги для стержневої системи.***

   4. 1 Складання системи сил.

   4.2 Складання рівнянь рівноваги

   4.3. Виконання перевірки результатів рішення.
5. ***Література:***

   І.М.С.Мовнин, А.Б.Израелит «Основы технической механики», 1979 - с. 13-е.23
6. ***Розе 'язання задач.***

Розв'язання задач з рівноваги матеріального об'єкта проводиться за таким алгоритмом:

1) вибрати об'єкт (тверде тіло, окрему точку), рівновагу для якого слід розглядати (в подальшому - тіло);

2) прикласти активні сили, що діють на це тіло;

3) застосувавши аксіому в 'язей, звільнити тіло від в 'язей і показати їх реакції;

4) для одержаної зрівноваженої системи сил скласти рівняння рівноваги;

5) визначити з цих рівнянь невідомі величини.

Коли в задачі кількість невідомих величин перевищує кількість рів нянь рівноваги, то задача є статично неозначеною. Для усунення статичної неозначеності необхідно або зменшити кількість невідомих величин, застосувавши, наприклад, теорему про три сили для системи збіжних сил, або шукати спосіб збільшення кількості рівнянь рівноваги до кількості невідомих величин, розглянувши, наприклад, рівновагу частини елементів складеної конструкції чи добавивши до рівнянь рівноваги залежність сили тертя від нормальної реакції при накладанні на об'єкт рівноваги шорсткої поверхні, як в'язі.

***Приклад** 1 Електрична лампочка вагою **P = 20H** підвішена за допомогою двох шнурів AB і AC, прикріплених до стіни і до стелі (рис. 16). Визначити реакції шнурів T_{AB} і T_{AC} якщо кути нахилу шнурів до стелі та стіни відповідно дорівнюють**:** α**=60** ; β**=135** . Вагою шнурів знехтувати.*

Розв'язання

Розглянемо рівновагу вузла A, на який діють: сила ваги P (активна сила) та реакції T_{AB} і T_{AC} шнурів (рис. 16,а) направлені вздовж шнурів до точок B і C закріплення.

На рис. 16,б показана схема розміщення у вибраній системі координат *зрівноваженої збіжної системи сил, які діють на вузол А.*

Складемо рівняння рівноваги цієї системи сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\ \mathrm{T_{AB}} sin30^o - \mathrm{T}_{AC} sin45^o = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\ \mathrm{T_{AB}} sin30^o - \mathrm{T}_{AC} sin45^o - P = 0$$

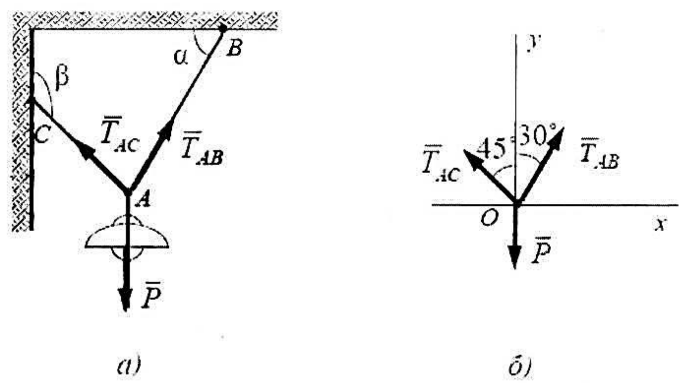


Рис.16

Розв'язуючи ці рівняння, знайдемо:

$$\boldsymbol{T_{AB} = \frac{P}{sin30^o + cos30^o} = \frac{20}{0,5 + 0,866} = 14,64H}$$

$$\boldsymbol{T_{AC} = T_{AB}\frac{sin30^o}{sin45^o} = 14,64\frac{0,5}{0,707} = 10,35H}$$

Приклад 2

Котел з рівномірно розподіленою за довжиною вагою P = 40 кН та радіусом R=1м лежить на виступах кам'яної кладки (рис. 17). Відстань між стінками кладки l=1,6м. Нехтуючи тертям, знайти тиск котла на кладку в точках A і B .

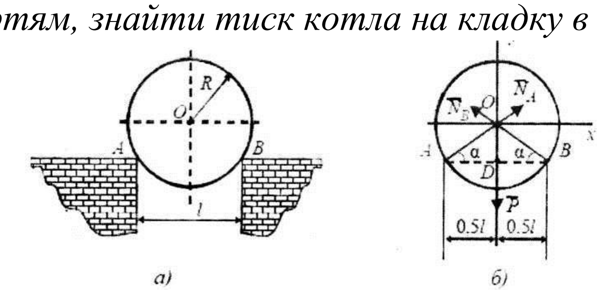


Рис.17

Розв'язання

*Котел знаходиться у стані рівноваги під дією трьох сил: сили ваги котла P та реакцій N_A і $И_b$ гладенької поверхні прикладених в точках і напрямлених перпендикулярно дотичним до кругової поверхні котла **в** точках A і B (рис. 17,6). Реакції $И_A$, N_B проходять через центр O кола котла і нахилені до горизонталі під* *кутами α (див. рис. 17,б)*

Для зрівноваженої плоскої системи збіжних сил складемо рівняння рівноваги (обрані осі координат показані на рис. 17,б)

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \ \ N_A cos\alpha - \ N_B cos\alpha = 0\,;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \ \ N_A sin\alpha - \ N_B sin\alpha - P = 0$$

Тригонометричні функції кута а знайдемо, розглянувши трикутник AOD (рис. 17,б):

$$cos\alpha = \frac{AD}{OA} = \frac{0{,}5l}{R} = 0{,}8; \quad sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha} = \sqrt{1 - 0{,}8^2} = 0{,}6$$

Розв'язуючи систему рівнянь рівноваги, знайдемо з першого рівняння $N_A = N_в = N$, а з другого одержимо:

$$\boldsymbol{N_A = N_B = \frac{2P}{sin\alpha} = \frac{2 \cdot 40}{0{,}6} = 33{,}3kN}$$

Задача для самостійного розв'язання:

Балка AB закріплена в точці A за допомогою нерухомого шарніра і утримується в горизонтальному положенні рухомим циліндричним шарніром в точці B (рис. 18). У середині балки діє сила P=2кН під кутом 45° до горизонту. Визначити реакції опор, взявши розміри з рисунка і нехтуючи вагою балки.

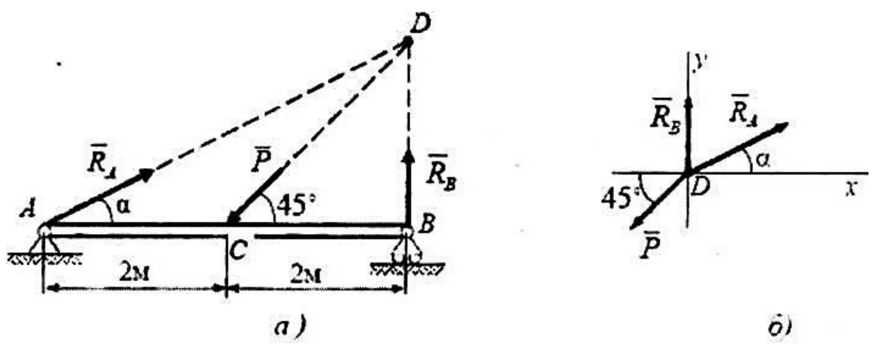


Рис.18

Розв'язання

Балка знаходиться у рівновазі під дією трьох сил: активної сили P та реакцій R_A і Rв. Реакція $R_в$ рухомого шарніра B напрямлена перпендикулярно опорній поверхні за вертикаллю. Реакція R_A шарніра A згі дно з теоремою про три сили пройде через точку D перетину сил P та Rв, створивши кут α з горизонталлю.

Величину кута α - знайдемо, розглянувши прямокутний трикутник ABD, в якому катет BD = 2м (як катет рівнобедреного трикутника BCD, а гіпотенуза

$$AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}\text{м}$$

Тоді $\quad sin\alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}447 \ \ cos\alpha = \frac{AB}{AD} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0{,}894$

Заняття №6

1. ***Тема: «Умови рівноваги збіжної системи сил»***
2. ***Вид заняття: практична робота***
3. ***Мета: Засвоїти визначення системи збіжних сил. Набути навички визначати рівнодіючу системи сил аналітичним та графічним методами.***
4. ***Література: Інструкція для виконання практичної роботи.***

Заняття №7

1. ***Тема: Пара сил.***
2. ***Вид заняття: лекція***
3. ***Мета: Засвоїти визначення пари сил, моменту пари та його дію. Засвоїти правила складання пар сил. Набути навички визначення величини моменту пари і напрямку обертання***

4. ***Теоретичний матеріал.***

4.1. Поняття пари сил. Ефект дії пари сил. .
4.2. Еквівалентність пар сил.
4.2. Додавання двох паралельних сил.
4.3. Умови рівноваги системи пар.

5. Питання для фронтального опитування.

5.1. Поясніть, яку рівнодіючу має система двох паралельних сил, що направлені в один бік, чому дорівнює її модуль та як проходить лінія дії?
5.2. Поясніть, яку рівнодіючу мають дві нерівні за модулем і протилежно направлені паралельні сили, чому дорівнює її модуль та як проходить лінія дії?
5.3. Що називається парою сил, прикладеною до твердого тіла?
5.4. Що називається площиною дії пари сил?
5.5. Що називається плечем пари сил?
5.6. Поясніть, чому система сил пари не знаходиться в рівновазі?
5.7. Поясніть, що намагається зробити з абсолютно твердим тілом прикладена до нього пара сил?
5.8. Що називається моментом пари сил ?
5.9. Запишіть формулу для визначення моменту пари сил як вектора.
5.10. Запишіть формулу для визначення модуля моменту пари сил.
5.11. В яких одиницях вимірюється модуль моменту пари сил?
5.12. Запишіть рівняннями рівноваги системи пар сил.

6. Література.

Мовнин М.С., Израелит А.Б. Основи технической Механики, Л.:Машиностроение. -1979,с.24-29

6. *Теоретичний матеріал*

*6.1. Дві рівні і паралельні сили, що спрямовані в протилежні сторони і не лежать на одній прямій, називаються **парою сил.***

Сума проекцій сил пари на будь-яку вісь дорівнює нулю, тобто пара сил має рівнодійною. Незважаючи на це тіло під дією пари сил тіло не знаходиться в рівновазі.

Дія пари сил на тверде тіло полягає в тому, що вона прагне обертати тіло. Здатність пари сил робити обертання визначається моментом пари, рівним твору сили на найкоротшу відстань між лініями дії сил.

$$\mathrm{M} = \mathrm{P}h$$

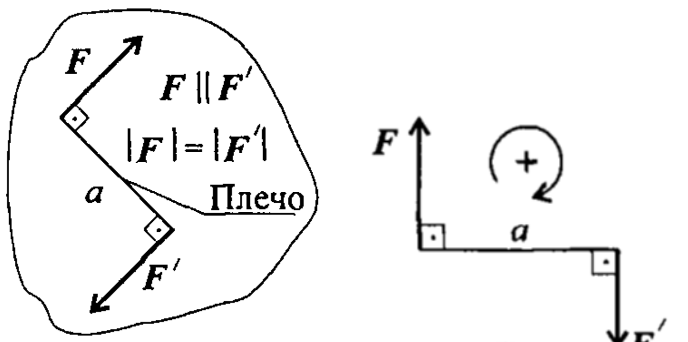
M – момент парі сил (Нм)

H – плече пари сил.

*Найкоротша відстань між лініями дії сил називається **плечем пари**.*

Ефект дії пари сил визначається її моментом. Момент пари сил вимірюється в ньютонометрах або в одиницях кратних ньютонометру (Нм, кНм, МНм).

Момент пари сил вважатимемо позитивним, якщо пара сил прагнути повернути тіло по напряму ходу годинникової стрілки і негативним, якщо пара прагнути обертати тіло проти ходу годинникової стрілки. Правило знаків для моментів пар умовне: можна було прийняти протилежне правило.



а) б)

Дві пари сил вважають еквівалентними у тому випадку, якщо після заміни однієї пари іншою парою механічний стан тіла не змінюється, тобто не змінюється рух тіла або не порушується рівновага тіла.

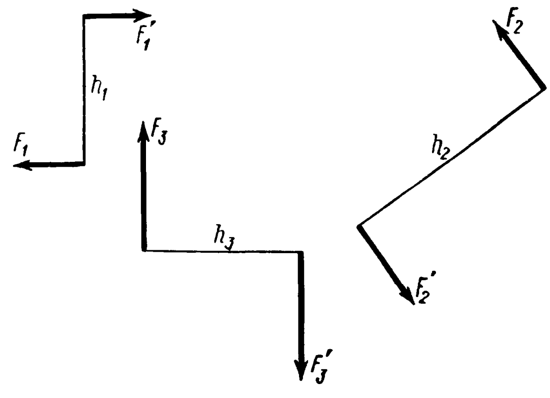
Ефект дії пари сил на тіло не залежить від її положення в площині.

Пару сил можна переносити в площині її дії у будь-яке положення.

Не порушуючи стану тіла, можна як завгодно змінювати величини сил і плече пари, аби лише момент пари залишався незмінним.

*6.2. Подібно до сил пари можна складати. Пара сил, замінюючи собою дію цих пар, називається **результуючою.***

Складемо дві пари, розташовані в одній площині. Маємо дві пари $F_1 F_1'$ и$F_2\ F_2'$ з плечима a и b, т.е. моментами $\mathrm{M}_1 = -F_1\mathrm{a}$; $\mathrm{M}_2 = F_2 b$.



Момент результуючої пари дорівнює сумі алгебри моментів складових пар.

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum_{i=1}^{n} M_i$$

Умови рівноваги системи пар, що лежать в одній площині:

Для рівноваги системи пар необхідно і достатньо, щоб момент результуючої пари дорівнював нулю або щоб сума алгебри моментів пар дорівнювала нулю.

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i = 0$$

7. *Приклади розв'язання задач*

Визначити момент результуючої пари, еквівалентній системі трьох пар, що лежать в одній площині . Перша пара утворена силами $F_1 = F_1' = 2\text{кН}$*, має плече* $h_1 = 1{,}25\text{м}$ *і діє за годинниковою стрілкою. Друга пара утворена силами* $F_2 = F_2' = 3\text{кН}$*, має плече* $h_2 = 2\text{м}$ *та діє проти годинникової стрілки; третя пара утворена силами* $F_3 = F_3' = 4{,}5\text{кН}$*, має плече* $h_3 = 1{,}2\text{м}$

Розв'язання.

1. *Визначаємо моменти утворюючих пар:*

$$M_1 = F_1 h_1 = 2 \cdot 1{,}25 = 2{,}5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$
$$M_2 = -F_2 h_2 = -3 \cdot 2 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$
$$M_3 = F_3 h_3 = 4{,}5 \cdot 1{,}2 = 5{,}4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для визначення моменту результуючої пари складаємо моменти заданих пар.

$$M = \sum M_i = M_1 + M_2 + M_3 = 2{,}5 - 6 + 5{,}4 = 1{,}9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Заняття №8

1. ***Тема: Плоска система довільно розташованих сил***
2. ***Вид заняття: лекція***
3. ***Мета: Засвоїти дії сил на тіло. що закріплене. Набути навички приведення системи сил до заданої точки.***

4. ***Теоретичний матеріал.***

4.1. Визначення довільної системи сил.

4.2. Головний вектор і головний момент довільної системи сил.

4.3. Приведення плоскої системи сил до точки.

5. Питання для фронтального опитування.

5.1. Що називається головним вектором плоскої системи довільних сил?

5.2. Що називають головним моментом плоскої системи довільних сил?

5.3. Як змінюються головний вектор і головний момент при зміні центра зведення?

5.4. До чого зводиться плоска система довільних сил, якщо $R \neq 0, \mathrm{M}_0 \neq 0$?

5.5. До чого зводиться плоска система довільних сил, якщо $R \neq 0, \mathrm{M}_0 = 0$?

5.6. До чого зводиться плоска система довільних сил, якщо $R = 0, \mathrm{M}_0 \neq 0$?

5.7. В якому випадку плоска система довільних сил знаходиться в рівновазі?

6. Література.

Мовнин М.С., Израелит А.Б. Основи технической Механики, Л.:Машиностроение. -1979,с.32-37

7. Теоретичний матеріал

Задачею статики твердого тіла є встановлення умов приведення заданої (довільної) системи сил, що не збігаються, до простішого вигляду.

Розглянемо метод Пуансона зведення незбіжної системи сил до одієї силм і однієї пари сил.

Припустимо, що в точках A, B, C, D прикладені сили P_1, P_2, P_3, P_4. *Вимагається привести ці сили точки O. площини. Приведемо спочатку силу* P_1, *прикладену в точці A.*

Прикладемо в точці O дві сили P_1 *і* P_2 *рівні нарізно по модулю заданій силі* P_1, *паралельні їй і спрямовані в протилежні сторони. В результаті приведення сили* P_1 *отримаємо* P_1', *прикладену в точці O, і пару сил* $P_1\mathrm{P}_1''$ *з плечем* a_1. *Поступивши так само з силою* P_2, *прикладеною в точці B, отримаємо* P_2',, *прикладену в точці O, і пару сил* $P_2\mathrm{P}_2''$ *з плечем* a_2 *і так далі.*

Плоску систему сил, прикладених в точках A, B, C і D ми замінили силами $\mathrm{P}_1', \mathrm{P}_2', \mathrm{P}_3'$ та P_4' *прикладеними в точці O і парами сил з моментами рівними моментам заданих сил відносно точки O:*

$$\mathrm{M}_1 = \mathrm{P}_1\mathrm{a}_1 = \mathrm{M}_o(\mathrm{P}_1); \qquad \mathrm{M}_2 = \mathrm{P}_2\mathrm{a}_2 = \mathrm{M}_o(\mathrm{P}_2)$$
$$\mathrm{M}_3 = \mathrm{P}_3\mathrm{a}_3 = \mathrm{M}_o(\mathrm{P}_3); \qquad \mathrm{M}_4 = \mathrm{P}_4\mathrm{a}_4 = \mathrm{M}_o(\mathrm{P}_4)$$

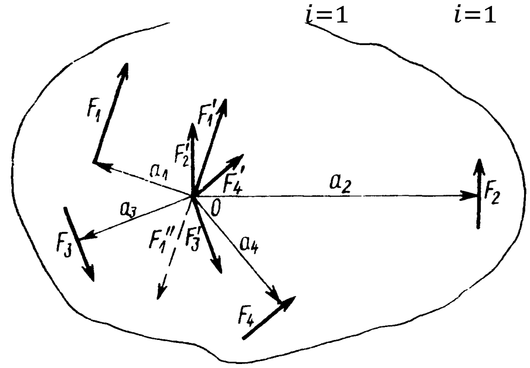
Сили, що сходяться в точці, можна замінити однією силою R рівній геометричній сумі складових,

$$R = P_1' + P_2' + P_3' + P_4' = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

*Цю силу, рівну геометричній сумі заданих сил, називають **головним вектором системи сил.***

На підставі правила складання пар сил їх можна замінити результуючою парою, момент якої дорівнює сумі алгебри моментів заданих сил відносно точки О.

$$M_0 = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = \sum_{i=1}^{n=4} M_i = \sum_{i=1}^{n} M_0(P_i)$$



Головний момент М пари, рівний сумі алгебри моментів усіх сил відносно центру приведення О, називають головним моментом системи відносно цього центру приведення О.

*Отже, в загальному випадку плоска система сил в результаті приведення до цієї точки О замінюється еквівалентною їй системою, що складається з однієї сили - **головного вектору,** - і однієї пари, момент якої називають **головним моментом** заданої системи сил відносно центру приведення.*

Необхідно засвоїти, що головний вектор не являється рівнодійної цієї системи сил, оскільки ця система не еквівалентна одній силі. Тільки у окремому випадку, коли головний момент перетворюється на нуль, головний вектор буде рівнодійною цієї системи сил. Оскільки головний вектор дорівнює геометричній сумі сил цієї системи, то ні модуль, ні напрям його не залежать від вибору центру приведення. Величина і знак головного моменту залежать від положення центру приведення, оскільки плечі складових пар залежать від взаємного положення сил і точки (центру), відносно якої беруться моменти.

Випадки приведення системи сил:

1. *$R \neq 0, M_0 \neq 0$ - система наводиться до головного вектору і головного моменту*
2. *$R \neq 0, M_0 = 0$ - система наводиться до однієї рівнодійної, рівної головному вектору системи.*
3. *$R = 0, M_0 \neq 0$ - система наводиться до пари сил, момент якої дорівнює головному моменту.*
4. *$R = 0, M_0 = 0$ - система знаходиться в рівновазі.*

Заняття №9

1. ***Тема: Плоска система довільно розташованих сил. Умови рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил***

2. ***Вид заняття: лекція***

3. ***Мета: Засвоїти умови рівноваги плоскої системи сил. Набути навички використання рівнянь рівноваги при розв'язання задач.***

4. ***Питання фронтального опитування***

4.1 Умови рівноваги плоскої систем довільно розташованих сил.

4.2 Рівняння рівноваги.

5. ***Література****: Мовнин М.С., Израелит А.Б. Основи технической Механики, Л.:Машиностроение. -1979,с.39-41*

6. Теоретичний матеріал

Оскільки, будь-яку систему сил у загальному випадку можна замінити головним вектором R і головним моментом М, для рівноваги системи необхідно і достатньо, щоб одночасно виконувались умови:

$\boldsymbol{R} = 0$; $M = 0$

Але вектори дорівнюють нулю, коли усі їх проекції дорівнюють нулеві, тобто:

$R_x=R_y=0$

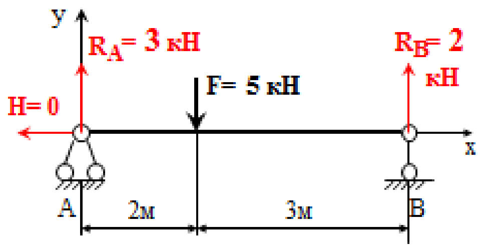
Тоді умови рівноваги просторової системи можна записати:

$$\sum F_{xi} = 0; \quad \sum F_{yi} = 0$$
$$\sum \mathrm{M_x}(F_i); \quad \sum \mathrm{M}_y(F_i)$$

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил на кожну координатних осей х, у дорівнювали нулеві, а також щоб суми моментів усіх сил відносно цих осей дорівнювали нулю.

Определение реакций

Пример 1. Определить реакции.



1. Показываем реакции.
2. Считаем число реакций и определяем степень статической неопределимости:

к = 3 реакции -3 ур.статики = 0 – -система статически определима.

3. Из уравнений статики определяем реакции.

$\sum M_A = 0.$ $R_B \cdot 5 - F \cdot 2 = 0.$ $R_B = (5 \cdot 2) / 5 = 2$ кН.

$\sum M_B = 0.$ $R_A \cdot 5 - F \cdot 3 = 0.$ $R_A = (5 \cdot 3) / 5 = 3$ кН.

$\sum X = 0.$ $-H_A = 0.$ $H_A = 0.$

Проверка: $\sum Y = 0.$ $R_A + R_B - F = 0.$

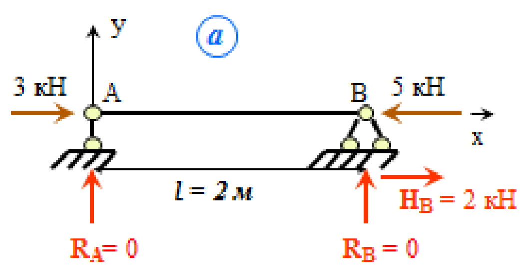
$3 + 2 - 5 = 0.$ $0 = 0.$

Подписываем реакции.

6

Определение опорных реакций

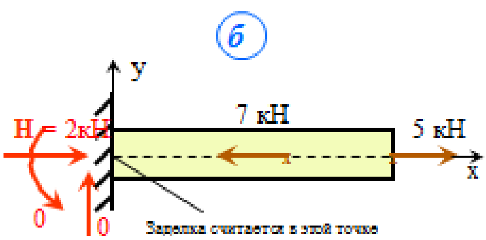
Пример 2. Определить реакции.



1. Показываем реакции.
2. Считаем число реакций и определяем степень статической неопределимости:

к = 3 реакции - 3 ур.статики = 0 - система статически определима.

3. Определяем реакции.



а

$\Sigma M_A = 0.$ $R_B \cdot 2 = 0.$ $R_B = 0.$

$\Sigma Y = 0.$ $R_A + R_B = 0.$ $R_A = 0.$

$\Sigma X = 0.$ $H_B + 3 - 5 = 0.$ $H_B = 2$ кН

б $\Sigma X = 0.$ $H - 7 + 5 = 0.$ $H = 2$ кН

7

<u>*Заняття №10*</u>

1. ***Тема: Плоска система довільно розташованих сил. Умови рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил.***

2. ***Вид заняття: лекція***

3. ***Мета: Засвоєння: видів опор балочних систем. Набуття навичок: визначення реакцій.***

4. ***Питання фронтального опитування***

4.1 Умови рівноваги плоскої систем довільно розташованих сил.

4.2 Записати рівняння рівноваги.

4.3 Види опор балочної системи.

4.4 Реакційні сили, що виникають в різних видах опор.

4.5 Позначення реакційних сил на силових схемах для різних опор балочної системи.

5. ***Література:*** *Мовнин М.С., Израелит А.Б. Основи технической Механики, Л.:Машиностроение. -1979,с. .41-45*

6. Теоретичний матеріал

<u>*Балкові системи та їх навантаження*</u>

Балкою називається деталь, яка зроблена з прямого бруса з опорами у двох (чи більше) точках і яка несе прямоосьове навантаження. Балкові системи застосовують у машинах і спорудах. Види кріплень балок та напрями реакцій в’язей: 1) балка має дві опори — шарнірно-нерухому і шарнірно-рухому (рис.19,а);

2) балка має три непаралельні шарнірно прикріплені стрижні (рис. 19,б);

3) балка спирається на три гладенькі поверхні, одна з яких має упор (рис. 19,с);

4) балка в трьох точках спирається на гладенькі поверхні (рис. 19,д);

5) балка жорстко закріплюється в стіні або затискується спеціальним пристроєм (рис. 19,е)

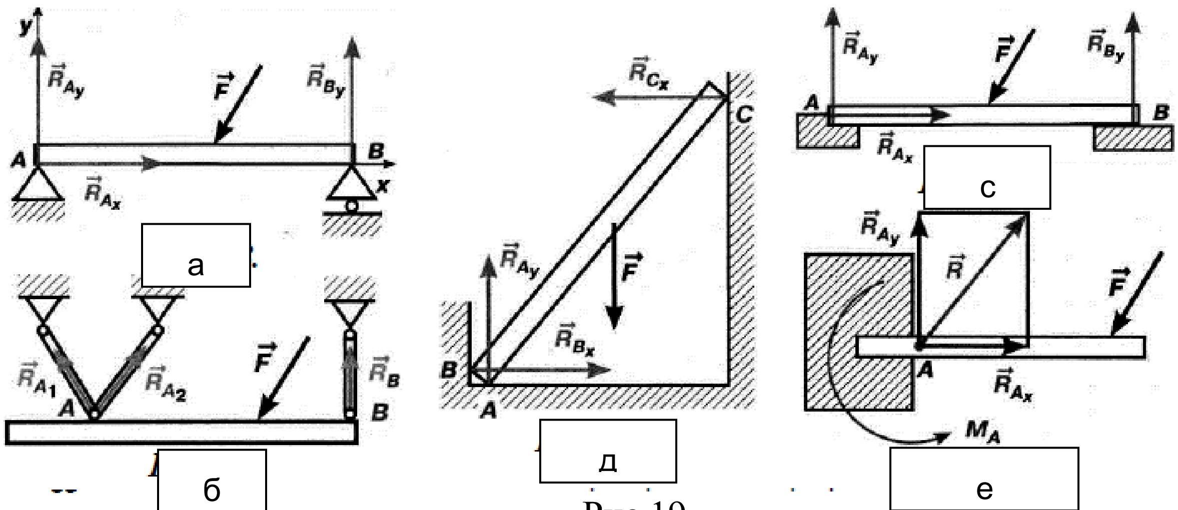


Рис.19

Навантаженнями *називають зовнішні сили, які діють на елементи конструкцій чи деталі машин і споруд під час їх експлуатації.*

За часом дії навантаження бувають:

1) постійні, які діють завжди, наприклад, сила тяжіння, що діє на споруду;

2) тимчасові, що діють протягом обмеженого періоду часу, наприклад, поїзд,що їде через міст.

Змінне навантаження *— навантаження, яке змінюється з часом в деяких межах.*

Залежно від характеру прикладання сил у часі розрізнюють:

*1) **статичні навантаження**, які відносно повільно й плавно (хоча б протягом кількох секунд) зростають від нуля до свого граничного значення, а далі залишаються незмінними (або незначно змінними). При передачі статичних навантажень на конструкцію всі її частини знаходяться в рівновазі. Прискорення елементів конструкції відсутні або настільки малі,* що ними можна знехтувати, а отже, й силами інерції. *Прикладом можуть слугувати навантаження, які діють на гідротехнічні споруди;*

*2) **динамічні навантаження** — навантаження, яке змінює свою величину за малий час. Воно супроводжуються значними прискореннями як деформованого тіла, так і тіл, що взаємодіють з ним. При цьому виникають сили інерції, якими не можна нехтувати. Динамічні навантаження поділяють на:*

а) миттєво прикладені, які зростають від нуля до свого граничного значення за дуже малий проміжок часу (частки секунди). Таким є навантаження при займанні пального в циліндрі двигуна внутрішнього згоряння або при зрушуванні з місця поїзда;

б) ударні навантаження, для яких характерне те, що в мить їх прикладання тіло, яке спричинює навантаження, має певну кінетичну енергію. Таке навантаження утворюється, наприклад, при забиванні паль за допомогою копра, в деталях механічного ковальського молота, в гідросистемах під час гідравлічного удару;

в) повторно-змінні навантаження, які безперервно й періодично змінюються в часі. Вони, як правило, пов’язані з рухами деталей, що циклічно змінюються. Це *зворотно-поступальні рухи штока поршня, коливання елементів конструкцій тощо. Дії таких навантажень зазнають шатуни у двигунах внутрішнього згоряння, вали, осі залізничних вагонів тощо.*

За характером прикладання навантаження поділяють на:

1) зосереджені (рис. 20,1) — такі зовнішні сили, що передаються на елемент конструкції через нескінченно малі площадки (фактично, прикладені до тіла в певній точці), наприклад, дія ваги електровоза на рельси;

2) розподілені (рис. 20,2) — такі зовнішні сили, що діють на одиницю об'єму, площі або довжини конструкції, наприклад, сила тяжіння, що діє на всю балку, дія снігового або вітрового навантаження на споруду. Розподілені за об'ємом, площею чи довжиною навантаження характеризуються інтенсивністю — силою, що припадає на одиницю об'єму , площі поверхні чи довжини лінії відповідно.

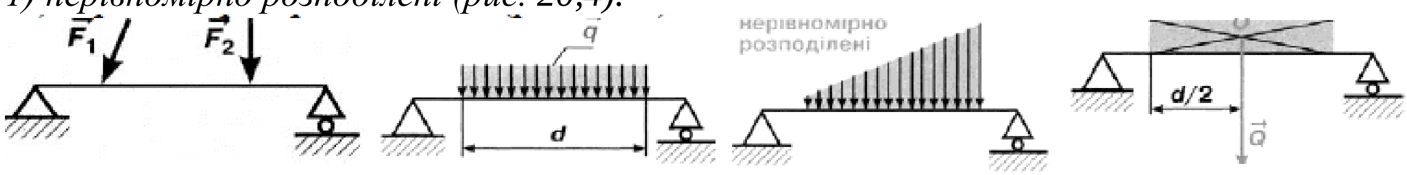
Зосереджена сила є абстракцією, так як будь яке реальне навантаження прикладене до певної ділянки лінії, площі чи об'єму тіла. Наприклад, навіть сила, що передається по нитці, розподілена по площі поперечного перерізу нитки.

В основному зустрічаються паралельні і збіжні розподілені навантаження. До паралельних сил, які розподілені за об'ємом тіла, відносять силу тяжіння, що діє на частини цього тіла. Сила тиску води на греблю відноситься до розподілених паралельних сил по поверхні греблі. Сила тяжіння частинок тонкої дротинки характеризує розподіл сил по довжині лінії.

За характером розподілу навантаження можуть бути:

1) рівномірно розподілені (рис. 20,3);

1) нерівномірно розподілені (рис. 20,4).



1 2 3 4

Рис. 20

а) <u>***за довжиною***</u> d — $Q = q \cdot d$, $\left([q] = \dfrac{Н}{м}, [d] = м\right)$;

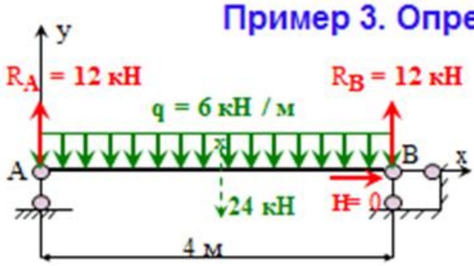
б) <u>***за площею***</u> S — $P = p \cdot S$, $\left([p] = \dfrac{Н}{м^2}, [S] = м^2\right)$;

в) <u>***за об'ємом***</u> V — $G = \gamma \cdot V$, $\left([\gamma] = \dfrac{Н}{м^3}, [V] = м^3\right)$.

Рівнодійна розподіленого навантаження чисельно дорівнює площі його епюри і прикладена в центрі її тяжіння.

7. Приклади розв'язання задач

Пример 3. Определить реакции



1. Показываем реакции.
2. Считаем число реакций и определяем степень статической неопределимости

κ = 3 реакции -3 ур.статики = 0 –
-система статически определима

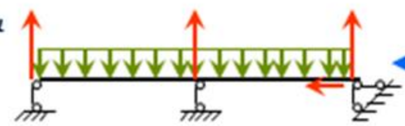
3. Из уравнений статики определяем реакции.

$\sum M_A = 0.$ $R_B \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 0.$ $R_B = (6 \cdot 4 \cdot 2) / 4 = 12$ кН

Исходя из симметрии системы и нагрузки $R_A = R_B = 12$ кН

$\sum X = 0.$ $H = 0.$ Проверка: $\sum M_B = 0.$ $R_A \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 0.$ $0 = 0.$

3-*а*

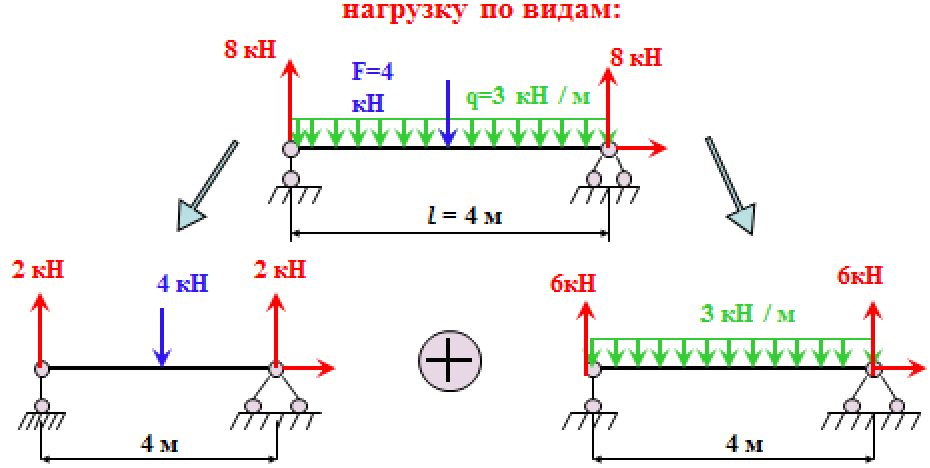


Изменятся ли реакции ?

8

Пример 5. Определить реакции.

При одновременном действии различных видов нагрузки можно пользоваться принципом суперпозиции и расслаивать нагрузку по видам:



10

Заняття №11

1. ***Тема: Умови рівноваги довільної системи сил***
2. ***Вид заняття: Практична робота № 2***
3. ***Мета: Набуття навичок: визначати опорні реакції двохопорних балок та балок жорстким закріпленням.***
4. ***Література інструкції виконання практичної роботи .***

Заняття №12

1. ***Тема: Просторова система сил.***
2. ***Вид заняття: лекція.***

3. Мета: Засвоїти проекцій сил на три взаємно перпендикулярні вісі та властивості моменту сили відносно вісі.

4. Питання фронтального опитування

4.1 Яка система сил називається просторовою?

4.2 Що називається балкою?

4.3 Які види кріплень балок вам відомі?

4.4 Що називається головним вектором?

4.5 Що називають головним моментом?

4.6 Які сили називаються навантаженнями?

4.7 На які види поділяються навантаження за характером дії?

4.8 На які види поділяються навантаження за часом дії?

4.9 Поясніть, чим розподілені навантаження відрізняються від зосереджених?

4.10 На які види поділяються розподілені навантаження?

5. Література: *Павлище В.Т. - Прикладна механіка: навчальний посібник. - Львів.- Інтелект - Захід- 2004с.46-47.*

6. Теоретичний матеріал

***6.1**. Зведення просторової системи сил до заданого центра.*

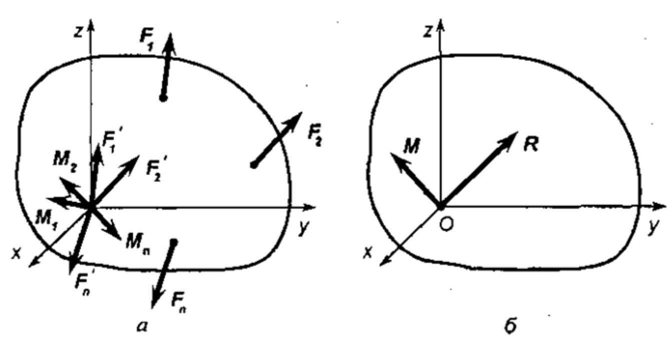


Рис.22

Розглянемо абсолютно тверде тіло, що перебуває під дією довільної просторової системи сил F_1 ,F_2, F_n. (рис.22) Візьмемо довільну точку О за центр зведення і перенесемо в цю точку усі сили, приєднуючи до системи, згідно з теоремою про *паралельний перенос сили, відповідні пари сил.*

Тоді на тіло діятимуть сили

$$F_1' = F_1;\ F_2' = F_2;\ F_3' = F_3$$

Прикладені в точці О, а також сукупність пар сил з моментами:

$$\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_0(F_\mathrm{x});\quad \mathrm{M}_2 = \mathrm{M}_0(F_\mathrm{x}); \dots\ \mathrm{M}_n = \mathrm{M}_0(F_\mathrm{x});$$

Сили, що прикладені в точці О, можна змінити головним вектором системи (рис.20)

$$R = \sum F_i'$$

А пари сил – однією парою, що має момент .:

$$\mathrm{M} = \sum \mathrm{M}_i$$

Якщо: $F_1' = F_1;\ F_2' = F_2;\ F_3' = F_3$

а $\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_0(F_\mathrm{x});\quad \mathrm{M}_2 = \mathrm{M}_0(F_\mathrm{x}); \dots\ \mathrm{M}_n = \mathrm{M}_0(F_\mathrm{x});$

тоді маємо:

$$R = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

$$\mathrm{M} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_0(F_i)$$

Вектор R, що дорівнює геометричній сумі усіх сил, називається ***головним вектором системи.***

Вектор М, що дорівнює геометричній сумі векторів моментів усіх сил відносно центра О, називається ***головним моментом системи відносно даного центра****.*

Таким чином, будь-яка просторова система сил через зведення до довільно вибраного центра замінюється однією, прикладеною в центрі зведення, силою, що дорівнює головному векторові системи, і однією парою, момент якої дорівнює головному моментові системи відносно центра зведення.

Система сил називається просторовою*, якщо лінії дії сил прикладених до тіла не лежать в однієї плоскості.*

Просторову систему сил як і плоску систему сил можна привести до будь-якої точки простору. Порядок приведення такий як і для плоскої системи сил.

Геометрична сума усіх сил даної просторової системи називається головним вектором.

Модуль головного вектора знаходимо через проекції на координатні осі х, у і ъ усіх сил системи:

$$R = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iz}\right)^2}$$

Головний момент просторової системи сил знаходиться як геометрична сума *моментів усіх сил відносно точки зведення.*

Величина головного моменту заданої системи сил відносно деякої точки знаходять за формулою:

$$M = \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} M_{ix}\right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{n} M_{iy}\right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{n} M_{iz}\right]^2}$$

Де $[\sum_{i=1}^{n} M_{ix}]$; $[\sum_{i=1}^{n} M_{iy}]$; $[\sum_{i=1}^{n} M_{iz}]$ *- алгебраїчні суми моментів усіх сил системи відносно осей x,y,z, які проходять через задану точку.*

Для рівноваги просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил на кожну з трьох осей x, y, z дорівнювали нулеві, а також щоб сума моментів усіх сил відносно цих осей дорівнювала нулю.

Тому для просторової системи сил можна записати шість рівнянь рівноваги:

$$\sum_{i=1} F_{xi} = 0; \quad \sum_{i=1} F_{yi} = 0; \quad \sum_{i=1} F_{zi} = 0$$

$$\sum^{n} M_x(F_i) = 0; \quad \sum^{n} M_y(F_i) = 0; \quad \sum^{n} M_z(F_i) = 0;$$

Заняття №13

1. ***Тема: Визначення центру ваги плоских геометричних фігур***
2. ***Вид заняття: лекція***
3. ***Мета: Засвоїти визначення центру ваги тіла; положення центру ваги простих геометричних фігур: прямокутника, трикутника та півкола; визначення центрів ваги перерізів, що складаються з простих геометричних фігур***

4.Питання фронтального опитування

4.1 Назвати основні геометричні характеристики.

4.2 Формули визначення координат центру ваги плоскої фігури.

4.3 Визначення полярного моменту інерції

4.4 Визначення осьового моменту інерції .

5 Література: *Мовнин М.С., Израелит А.Б. Основи технической Механики, Л.:Машиностроение. -1979,с. .47-57*

6. Теоретичний матеріал

6.1. Статичні моменти і центр ваги перерізів.

Основні геометричні характеристики плоских перерізів

Функціональна здатність окремих елементів машини та споруд залежить не тільки від навантаження і матеріалу цих елементів, але й від форми та розмірів їхніх поперечних перерізів.

Основні геометричні характеристики плоских перерізів:

- *Площа;*
- *Центр ваги перерізу;*
- *Статичні моменти;*
- *Моменти інерції плоских перерізів.*

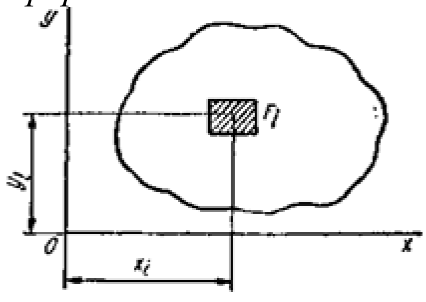


Рис. 23

Статичний момент перерізу

Статичним моментом перерізу відносно даної осі називають взяту по всій площині перерізу суму добутків площинок /ц на їхні відстані до даної осі:

$S_x = F_t y_t$- *статичний момент відносно осі х,*

$S_y = F_t x_t$- *статичний момент відносно осі у.*

Сума статичних моментів всіх площинок фігури називається статичним моментом площі фігури відносно даної осі.

$$S_x = \sum F_i y_i$$

Статичний момент може бути додатним, від'ємним або дорівнювати нулю.

Розмірність статичного моменту - мм або м .

Координати центра ваги визначають за формулами:

$$x_c = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i} = \frac{\sum F_i x_i}{F} = \frac{S_y}{F}$$

$$y_c = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i} = \frac{\sum F_i y_i}{F} = \frac{S_x}{F}$$

$\sum F_i$ *– сума площин фігур*

F – сума всієї фігури

<u>Статичний момент перерізу відносно центральної осі дорівнює нулеві</u>.

У багатьох випадках центр ваги перерізу можна визначати безпосередньо. Наприклад, якщо переріз має дві осі симетрії, то центр ваги лежить в точці їхнього перетину (рис. 23 а). У випадку, коли фігура має одну вісь симетрії '(рис. 23 б), центр ваги розташований на цієї осі, але для встановлення його потрібно знайти ще одну координату.

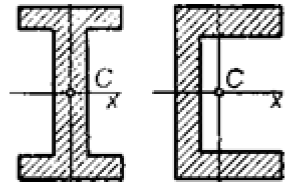
Якщо переріз можна розділити на скінченне число п окремих фігур, площі яких F_i *координати центрів ваги* X_{ci} *та* $У_{ci}$ *відомі, то використовував формули:*

$F = \sum F_i;\ S_x = \sum F_i y_{ci}\ ;\qquad S_y = \sum F_i x_{ci}$

Та підставив отримані значення у відомі формули

$$x_c = \frac{S_y}{F} \qquad y_c = \frac{S_x}{F}$$

визначимо координати центра ваги фігури.



$$I_p = \sum \Delta F \rho^2$$

6.2 Деякі відомост... фігур, які можуть зустрічатися при розв'яза...

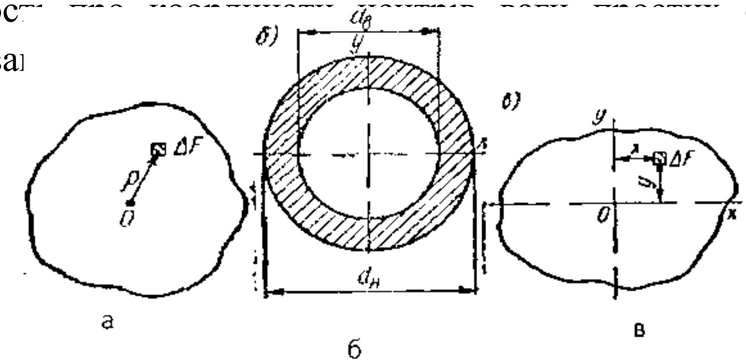


Рис.17

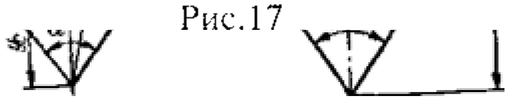


Рис.24

Центр ваги паралелограма і прямокутника співпадає з с точкою С (рис.24а) перетину діагоналей. Центр ваги трикутника находиться у місці перетину медіан (рис.24б). Положення центра ваги кругового сектора (рис.24 в) знаходять за формулою:

$$y_c = \frac{4}{3} r \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$$

Де α - центральний кут сектора в радіанах.

Положення центра ваги сегмента круга (рис. 24,г) знаходять за формулою

$$y_c = \frac{4r\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^3}{3(\alpha - \sin\alpha)}$$

6.3 Полярний та осьовий моменти інерції

Полярним моментом інерції перерізу відносно даної осі називають взяту по всій площині перерізу суму добутків площинок на квадрати їх відстаней до деякої точки О, яку прийнято називати полюсом. (рис. 25а)

$$I_p = \sum \Delta F \rho^2$$

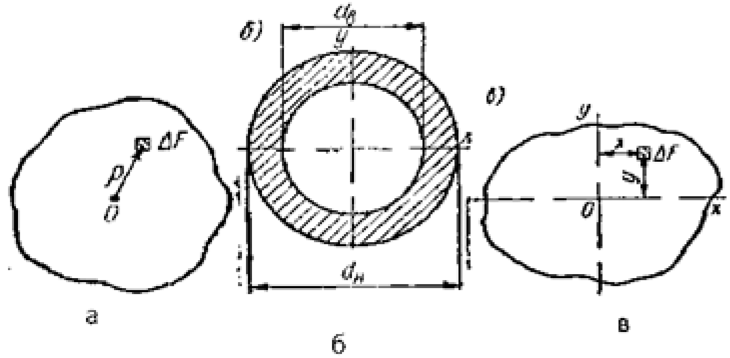


Рис.25

Осьовим моментом інерції перерізу відносно даної осі називають взяту по всій площині перерізу суму добутків площадок на квадрати їх відстаней до цієї осі (рис.25в).

$$I_x = \sum \Delta F y^2 \quad I_y = \sum \Delta F x^2$$

Осьові і полярні моменти перерізів завжди додатні. Розмірність осьових і полярних моментів інерції - мм або м .

Для перерізу в формі круга або кругового кільця момент інерції характеризується здатністю опиратися деформуванню кручення а використовується як геометрична характеристика поперечного перерізу при розрахунках на кручення.

Практичний інтерес має полярний момент інерції відносно центра ваги перерізу. Величина полярного моменту інерції круга знаходиться за формулою:

$$I_\rho = \frac{\pi d^3}{32}$$

Або приблизно $I_\rho = 0{,}1d^4$

<u>Полярний момент інерції кільця</u> дорівнює різниці полярних моментів інерції двох кругів діаметрами dн и dв, (рис. 25).

$$I_\rho = \frac{\pi d_н^4}{32} - \frac{\pi d_в^4}{32}$$

Або приблизно $I_\rho = 0{,}1d_н^4(1-\alpha^4)$

Де $\alpha = \frac{d_в}{d_н}$

6.4 <u>Осьовий момент інерції прямокутного перерізу (рис. 26а) визначають за формулою</u>:

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

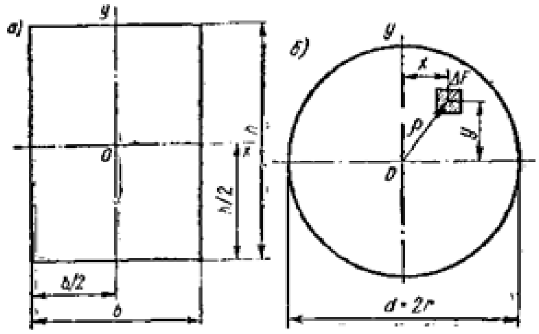


Рис. 26

Для визначення осьового моменту інерції кругового перерізу відносно центральної осі х, використовуємо величину полярного вектора, яка дорівнює :

$$I_\rho = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0{,}1d^4$$

Згідно з рисунком 26 : $\rho^2 = x^2 + y^2$

Тому для кола момент інерції відносно любих осей, що проходять через центр, рівні між собою: $I_x = I_y$

Для кільцевого перерізу: $I_x = I_y = \frac{I_\rho}{2} = \frac{\pi_н^4(1-\alpha^4)}{32-2} \approx 0{,}05d_н^4(1-\alpha^4)$

7. Розв'язання задач

Задача 1. Визначити положення центра ваги плоскої фігури (рис. 7. зігнутої з тонкого дроту.

Р о з в 'я з а н н я. Дана фігура складається з чотирьох прямих відрізкі $AB = l_1 = 8$ см, $BD = l_2 = 10$ см, $DE = l_3 = 6$ см, $EF = l_4 = 4$ см. На ці частини

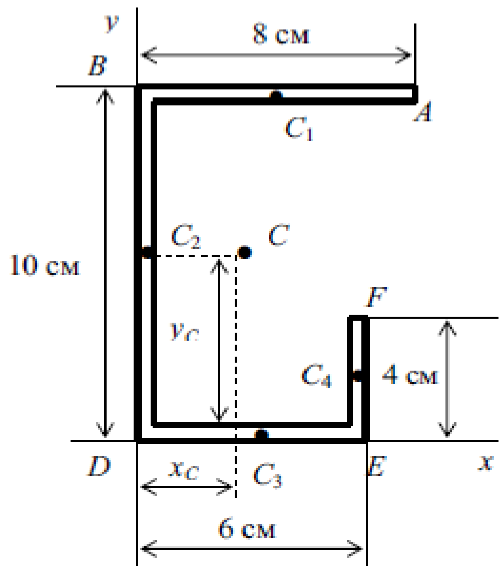


Рис. 7.1

розділимо всю фігуру.

Осі координат розташуємо та щоб вони співпадали з відрізкам DE (вісь x) і DB (вісь y).

Для центрів ваги C_1, C_2, C_3 і кожного відрізка відповіді знайдемо їх координат враховуючи розміри фігури. Д координат точки C_1 маємо:

$$x_1 = \frac{AB}{2} = 4 \text{ (см)}; \quad y_1 = BD = 10 \text{ см}$$

Для відрізка BD координати центр ваги C_2 дорівнюють:

$$x_2 = 0; \quad y_2 = \frac{BD}{2} = 5 \text{ (см)}.$$

Координати точки C_3:

$$x_3 = \frac{DE}{2} = 3 \text{ (см)}; \quad y_3 = 0 .$$

Координати точки C_4:

$$x_4 = DE = 6 \text{ см}; \quad y_4 = \frac{EF}{2} = 2 \text{ (см)}.$$

За формулами (7.1) знаходимо координати центру ваги всієї фігури:

$$x_C = \frac{\sum x_i l_i}{\sum l_i} = \frac{4\cdot 8 + 0\cdot 10 + 3\cdot 6 + 6\cdot 4}{8+10+6+4} = 2{,}64 \text{ (см)};$$

$$y_C = \frac{\sum y_i l_i}{\sum l_i} = \frac{10\cdot 8 + 5\cdot 10 + 0\cdot 6 + 2\cdot 4}{8+10+6+4} = 4{,}93 \text{ (см)}.$$

Задача 3. Визначити положення центру ваги C площі поперечного перерізу однорідного штампу, зображеного на рис. 7.3.

Р о з в 'я з а н н я. Зважаючи, що переріз має вісь симетрії, проведемо вісь x вздовж осі симетрії. Оскільки центр ваги C перерізу розташований на осі симетрії, тобто на осі x, то необхідно визначити лише координату x_C.

Допоміжними лініями MP і NS розіб'ємо площу перерізу на три прямокутники. Позначимо прямокутник $MDBA$ номером *1*, прямокутник $ENLK$ номером *2* і прямокутник $NMPS$ – номером *3*. Тоді за формулою (7.2) маємо:

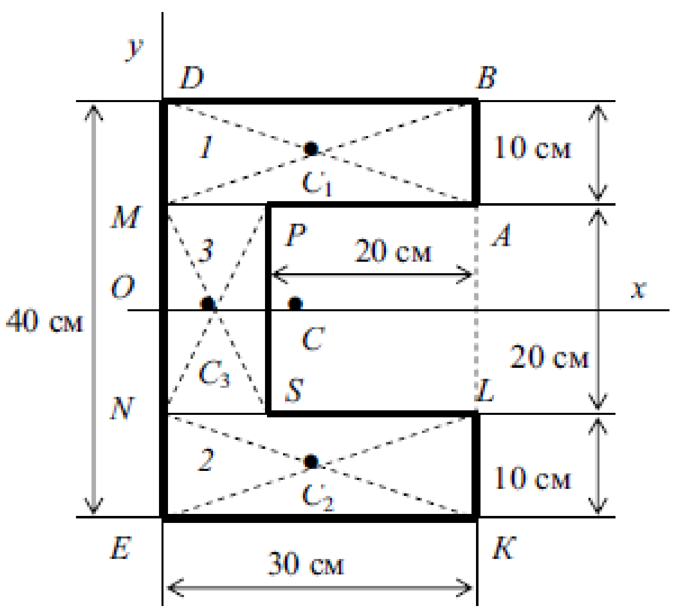


Рис. 7.3

$$x_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3}.$$

Оскільки центри ваги C_1, C_2 і C_3 прямокутників розташовані в точках перетину їх діагоналей, то

$$x_1 = x_2 = 15 \text{ см}, \ x_3 = 5 \text{ см}.$$

Площі прямокутників

дорівнюють:

$$S_1 = S_2 = 300 \text{ см}^2, \qquad S_3 = 200 \text{ см}^2.$$

Отже,

$$x_C = \frac{15 \cdot 300 + 15 \cdot 300 + 5 \cdot 200}{300 + 300 + 200} = 12{,}5 \text{ (см)}.$$

Таким чином, центр ваги площі перерізу штампу розташований у точці C з координатами x_C =12,5 см, $y_C = 0$.

Цю задачу можна розв'язати ***іншим способом***, провівши допоміжну пряму AL (рис. 7.3) і розглянувши площу даного перерізу як різницю площ прямокутників $EDBK$ і $APSL$. При цьому для координати x_C центру ваги маємо:

$$x_C = \frac{x_1^* S_1^* - x_2^* S_2^*}{S_1^* - S_2^*},$$

де x_1^* – абсциса центру ваги прямокутника $EDBK$ і x_2^* – абсциса центру ваги прямокутника $APSL$, а S_1^* і S_2^* – відповідно площі цих прямокутників. Враховуючи, що

$$x_1^* = 15 \text{ см}, \qquad x_2^* = 20 \text{ см},$$
$$S_1^* = 1200 \text{ см}^2, \qquad S_2^* = 400 \text{ см}^2,$$

знаходимо

$$x_C = \frac{15 \cdot 1200 - 20 \cdot 400}{1200 - 400} = 12,5 \text{ (см)}.$$

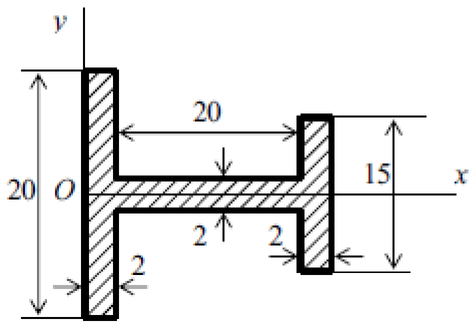
Завдання для самостійної роботи .

7.5. Визначити положення центру ваги площі фігури, що складається з трьох прямокутників. Розміри вказані в сантиметрах.

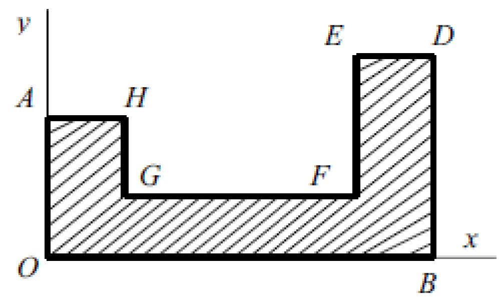
Відповідь: x_C = 11 см, y_C = 0 см.

7.6. Визначити положення центру ваги плоскої фігури $AOBDEFGH$, в якій AO = 3 см, AH = 2 см, HG = 1,5 см, EF = 4 см, DE = 2 см, FG = 6 см.

Відповідь: x_C = 5,77 см, y_C = 1,77 см.



До задачі 7.5



До задачі 7.6

<u>Заняття №14</u>

1. ***Тема: Визначення центру ваги плоских геометричних фігур***
2. ***Вид заняття: лекція***
3. ***Мета: Засвоєння: визначення центру ваги тіла. Визначення центрів ваги перерізів стандартних профілів прокату Набуття навичок: розв'язання задач по визначенню положення центру ваги***

4. Питання фронтального опитування.

4.1 Назвати основні геометричні характеристики перерізів.

4.2 Формули визначення координат центу ваги перерізу.

4.3 Значення та застосування геометричних характеристик перерізів.

4.4 Одиниці виміру полярного моменту інерції, осьового моменту інерції та радіусу інерції.

5 Література: *Мовнин М.С., Израелит А.Б. Основи технической Механики, Л.:Машиностроение. -1979,с. .47-57*

6. Теоретичний матеріал

7. Розв'язання задач

<u>Задача.1</u>

Визначити положення центра ваги тяжіння перерізу (рис.27)

Розв'язання.

Перетин семетрічно щодо вертикальної осі. Отже, центр ваги перерізу лежить на осі y.

Обчислимо статичний момнта площі щодо осі x, срвпадающей з нижнім краєм фігури.

$$S_x = F_1 y_1 + F_2 y_2 = 26{,}4 \cdot 10 + 18{,}1 \cdot 21{,}8 = 658\ (\text{см}^2)$$

Обчислимо координату центру ваги.

$$y_с = \frac{S_x}{F_1 + F_2}$$

$$y_с = \frac{658}{26{,}4 + 18{,}1} = 14{,}8\ (\text{см})$$

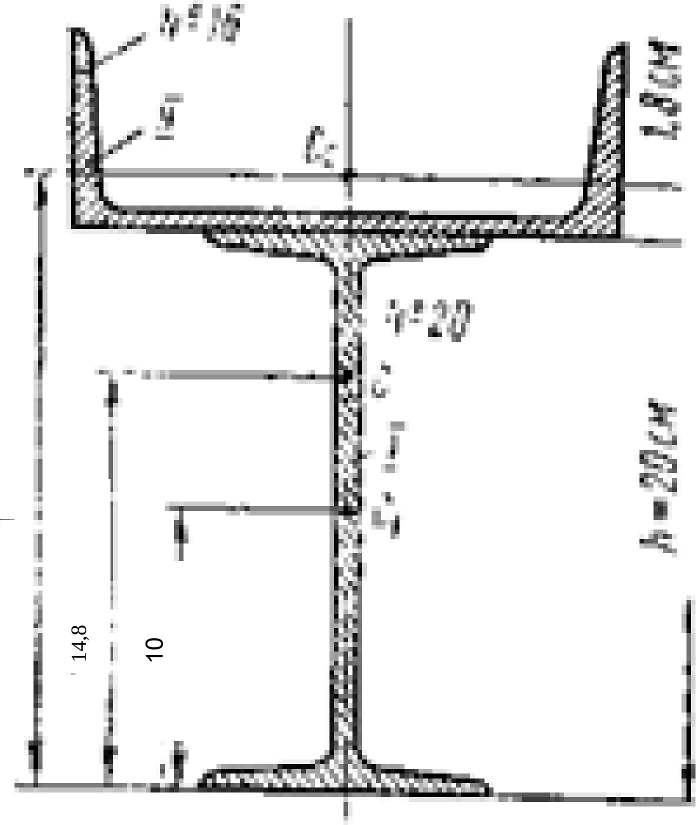


Рис.27

<u>Задача 2</u>

Визначити положення центра тяжіння (рис.28)

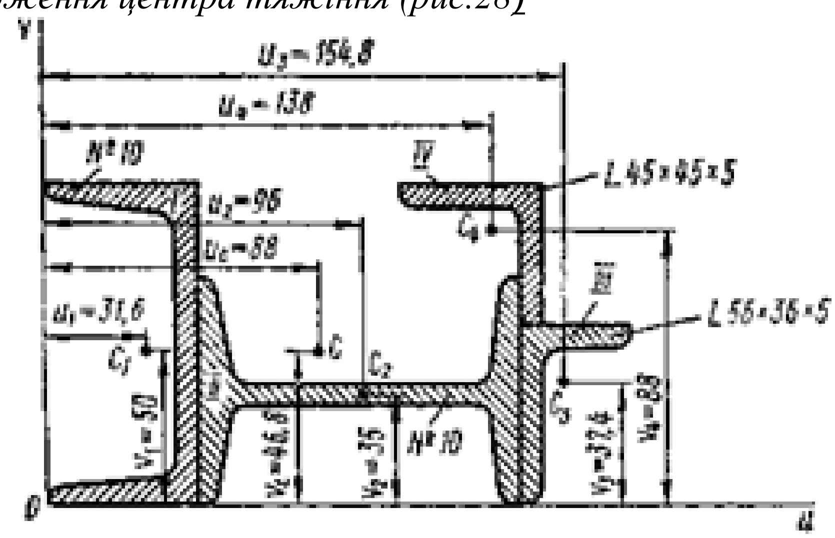


Рис.28

Задамо систему координат так, щоб перетин було розміщено в першому квадранті. складовими частинами перетину є швелер №10, двутавр №10, нерівнополичний уголок56 х36 х5, равнополочний уголок 45х45х5.

Значення площ і координат центрів тяжіння швелера, двутавра і куточка беремо з таблиць ГОСТ 8240-97, ГОСТ 8239-87, ГОСТ8510-93, ГОСТ 8509-93

Для швелера №10 $F_1=10{,}9см^2$

Для двотавра №10 $F_2=14{,}2см^2$

Для неравнополочного уголка 56х36х5 $F_3=4{,}41см^2$

Для равнополочного уголка 45х45х5 $F4=4{,}29см^2$

Координати центрів тяжіння швелера, двотавру, уголков зазначені на креслені в мм. Визначаємо положення центра тяжіння перерізу.

$$y_{\text{c}} = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3 + F_4 y_4}{F_1 + F_2 + F_3 + F_4} = \frac{10{,}9 * 5 + 14{,}2 * 3{,}5 + 4{,}41 * 3{,}74 + 4{,}29 * 8{,}8}{10{,}9 + 14{,}2 + 4{,}41 + 4{,}29} = 4{,}68\ (\text{см})$$

$$\mathrm{x_c} = \frac{F_1 \mathrm{x}_1 + F_2 \mathrm{x}_2 + F_3 \mathrm{x} + F_4 \mathrm{x}_4}{F_1 + F_2 + F_3 + F_4} = \frac{10{,}9 * 3{,}16 + 14{,}2 * 9{,}6 + 4{,}41 * 15{,}48 + 4{,}29 * 13{,}8}{10{,}9 + 14{,}2 + 4{,}41 + 4{,}29} = 8{,}8(\text{см})$$

<u>*Заняття №15*</u>

1. ***Тема: Визначення центру ваги складних перерізів***
2. ***Вид заняття: практична робота №3***
3. ***Мета: Набуття навичок: визначення центру ваги складних геометричних перерізів***