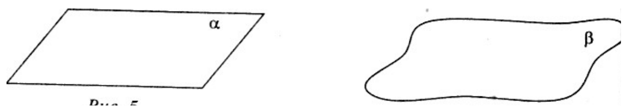
Тема. Основні поняття, аксіоми стереометрії та наслідки з них. Взаємне розміщення двох прямих у просторі.

<u>Основні поняття стереометрії</u>

<u>Основними фігурами в просторі є точка, пряма і площина.</u>



а б

Рис. 1

Зображають площини у вигляді паралелограма (рис. 1а) або у вигляд довільної області (рис. 1б).

Позначають площини грецькими буквами, наприклад, площини α, β, γ... На рис. 1а зображено площину α, на рис. 1б – площину β.

Як і будь-яка геометрична фігура, площина складається з точок. Якщо точка А лежить у площині α, говорять, що площина α проходить через точку А, і записують: $A \in \alpha$. Якщо точка А не лежить у площині α, говорять, що площина α не проходить через точку А, і записують: $A \notin \alpha$.

Якщо кожна точка прямої *a* лежить у площині α, говорять, що пряма *a* лежить у площині α, або площина α проходить через пряму *a*, і записують: $a \subset \alpha$. Запис $a \not\subset \alpha$ означає, що пряма *a* не лежить у площині α.

<u>Аксіоми стереометрії</u>

C_1 : ***Яка б не була площина, існують точки, які належать цій площині, і точки, які не належать їй.***

C_2: ***Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.***

C_3: ***Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину, і до того ж тільки одну.***

<u>Наслідки з аксіом стереометрії.</u>

Теорема про існування площини, яка проходить через дану пряму і дану точку

Один спосіб визначення площини в просторі відомий (аксіома C_3).

Другий спосіб завдання площини дає теорема: ***Через пряму і точку, яка не належить їй, можна провести площину, і до того ж тільки одну.***

Нехай AB – дана пряма і C– точка, яка їй не належить.

Доведення (існування площини)

Твердження	Аргумент
Візьмемо точку D, яка лежить на прямій AB	I*
Через точки D і C проведемо пряму DC	I
Через прямі AB і DC проведемо площину α	C_3

Доведення (єдиність площини)

Доведемо від супротивного. Припустимо, що існує дві площини α і β , які проходять через пряму AB і точку C. За аксіомою C_2 площині α і β перетинаються по прямій, якій належать A, B, C, що суперечить умові. Отже, площина, яка проходить через пряму і точку, що не належить прямій, єдина.

Теорема (про належність площині прямої, дві точки якої належать площині). ***Якщо дві точки прямої належать площині, то і вся пряма належить площині.***

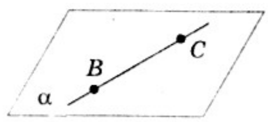
Дано: $B \in \alpha$, $C \in \alpha$ (рис. 2).

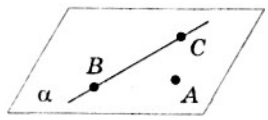
Довести: $BC \subset \alpha$.

Доведення

Візьмемо точку A, яка не лежить на прямій BC (згідно з аксіомою I). Через пряму BC і точку A проведемо площину α' .

Якщо площини α і α' збігаються, то площина α містить пряму BC (рис. 3).





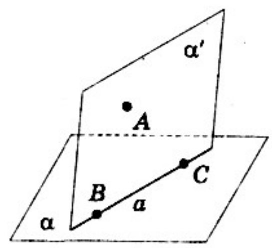


Рис. 2 Рис.3 Рис. 4

Якщо площини α і α' різні, то вони перетинаються по прямій a', яка містить точки B і C (рис. 4). За аксіомою I прямі a і BC збігаються, отже, пряма BC лежить в площині α.

Теорема про існування площини, яка проходить через три точки

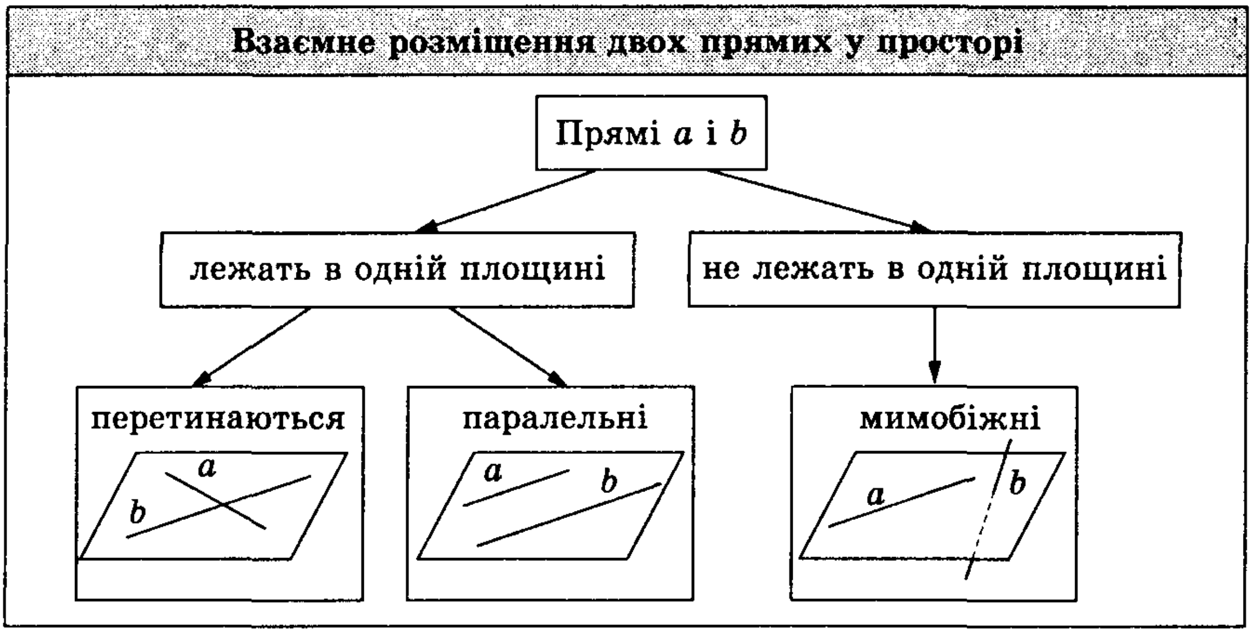
Теорема: ***Через три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.***

<u>Взаємне розміщення двох прямих у просторі</u>

У просторі дві різні прямі або перетинаються, або не перетинаються. Проте другий випадок допускає дві можливості: прямі лежать в одній площині або прямі не лежать в одній площині.

Прямі, які не перетинаються і лежать в одній площині, називають паралельними, а дві прямі, які не перетинаються і не лежать в одній площині, називають *мимобіжними*.

Отже, дві прямі a і b у просторі можуть: перетинатися, бути паралельними, бути мимобіжними (демонструється схема, наведена нижче).



Теорема про існування і єдиність прямої, яка проходить через дану точку і паралельна даній прямій

З аксіоми паралельності Евкліда випливає, що в площині через дану точку можна провести не більше однієї прямої, яка паралельна даній прямій. А скільки таких прямих можна провести у просторі?

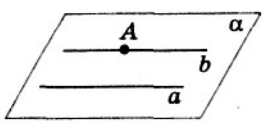


рис.5

Нехай дано пряму *a* і точку А, що не лежить на ній. Через них можна провести єдину площину. У цій площині можна провести єдину пряму *b*, яка паралельна прямій *a* (рис. 5).

Отже, у просторі через дану точку А можна провести єдину пряму, паралельну дані прямій *a*.

Таким чином, справедлива теорема:

Через будь-яку точку простору, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і тільки одну.

Ознака паралельності прямих

Теорема. ***Дві прямі паралельні третій паралельні між собою***.

Доведення

Нехай $b \parallel a$, $c \parallel a$. Доведемо, що $b \parallel c$.

Прямі *b* і *c* не можуть перетинатися. Інакше через точку їх перетину проходили б дві різні прямі, паралельні прямій *a*, що суперечило б теоремі про існування і єдності прямої, яка проходить через дану точку і паралельна даній прямій.

Припустимо, що прямі b і c – мимобіжні (рис. 6).

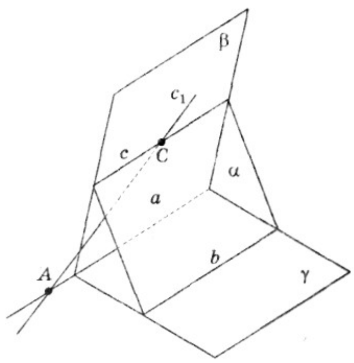


Рис.6

Через паралельні прямі b і a, c і a проведемо площини γ і β, а через пряму *b* і точку С прямої *c* – площину α. Нехай площини α і β перетинаються по прямій c_1. Прямі *a, c,* c_1 лежать в одній площині β, причому $c \parallel a$. Тому пряма c_1, яка перетинає *c*, перетинає пряму *a* в деякій точці А. Прямі c_1 і *a* лежать відповідно у площинах α і γ, тому їх спільна точка А належить цим площинам, а отже, і їх спільній прямій *b*. З припущення випливає, що паралельні прямі *a* і *b* мають спільну точку А, що суперечить умові.

Отже, прямі *b* і *c* не можуть ні перетинатися, ні бути мимобіжними. Таким чином, $b \parallel c$.

Ознака мимобіжних прямих

Теорема. ***Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину в точці, яка не лежить па першій прямій, то ці прямі мимобіжні.***

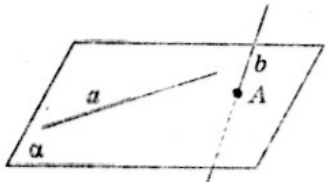


Рис.7

Доведення. Нехай пряма a лежить у площині α, а пряма b перетинає цю площину в точці A такій, що $A \notin a$ (рис. 7). Доведемо, що прямі *a* і *b* мимобіжні. Припустима що прямі *a* і *b* не мимобіжні, тобто вони лежать в деякій площині β. Площина β проходить через пряму *a* і точку A і тому збігається з площиною *a* . Таким чином пряма *b* лежить в площині *a*, що суперечить умові. Отже, прямі *a* і *b* не лежать в одній площині, що і треба було довести.

Тема. Паралельне проектування і його властивості. Зображення фігур в стереометрії.

Паралельне проектування та його властивості

Для зображення просторових фігур у стереометрії користуються паралельним проектуванням.

Нехай задано довільну площину α, точку А (рис. 1) і пряму h, яка перетинає площину α.. проведемо через точку А пряму паралельну до прямої h, вона перетинає площину α у деякій точці A_1. Знайдену таким способом точку A_1 називають паралельною проекцією точки А на площину α у напрямі h.

Пряму h називають проектуючою прямою, площину α – площиною проекцій. Щоб побудувати проекцію будь – якої фігури, треба спроектувати на площину проекції кожну точку даної фігури (рис. 2).

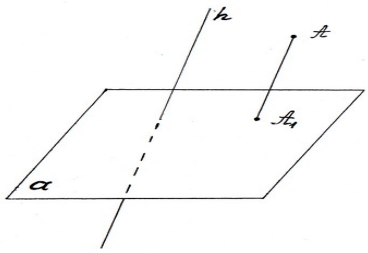


рис. 1

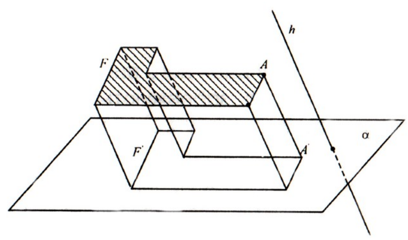


рис. 2

Наведемо деякі властивості паралельного проектування.

Теорема. ***Якщо відрізки, які проектуються, не паралельні проектуючий прямій, то при паралельному проектуванні: 1) відрізки зображуються відрізками; 2) паралельні відрізки зображуються паралельними відрізками або відрізками однієї прямої; 3) відношення довжин паралельних відрізків і відрізків однієї прямої зберігається.***_(середина відрізка при зображені його на площині теж є серединою)._

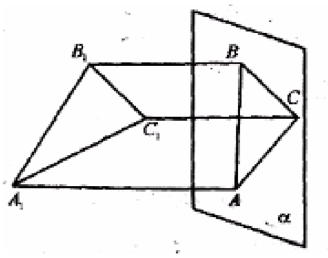
Крім цього слід зазначити, що при паралельному проектуванні величина кута і відношення довжин непаралельних відрізків не зберігається.

Розглянуті властивості паралельного проектування дають змогу наочно зображати просторові фігури на площині.

Зображенням фігури називається будь-яка фігура подібна до паралельної проекції даної фігури на деяку площину. Зображення піраміди, призми, циліндра або конуса починають із зображення їх основи – многокутника або кола. Зупинимося на зображенні найбільше вживаних геометричних фігур, з комбінацій яких складається, як правило, зображення будь-якої складної просторової фігури.

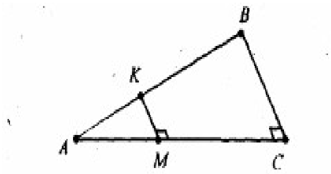
Зображення трикутника

Будь-який трикутник (прямокутний, рівнобедрений, правильний) зображується довільним трикутником у зручному розташуванні на рисунку.



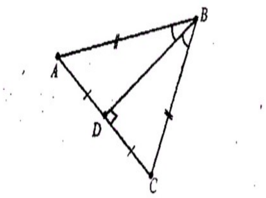
ΔABC зображення $\Delta A_1B_1C_1$ на площині α.

Якщо $\Delta A_1B_1C_1$ - прямокутний, то зображення напрямків двох його висот (катетів) задано. Довільно зображуються висота, опущена на гіпотенузу, і центр вписаного кола. Зображення перпендикуляра, опущеного із заданої точки гіпотенузи на який-небудь катет, є відрізком, паралельним другому катету.



$<C = 90°$, AB - гіпотенуза, $K \in AB$, $KM \perp AC$, $KM \parallel BC$.

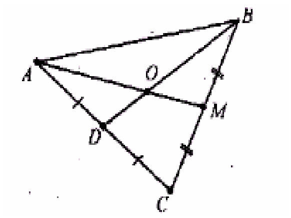
B_1



Якщо $\Delta A_1B_1C_1$ - рівнобедрений, то зображення медіани D_1 є зображенням висоти і бісектриси $\Delta A_1B_1C_1$. Зображення центра вписаного і описаного кіл належать BD.

$AB = BC$, BD - медіана (бісектриса, висота).

Якщо $\Delta A_1B_1C_1$ - правильний, то центри вписаного і описаного кіл співпадають і лежать в точці перетину медіан. Тому побудова зображення цього трикутника не може бути довільною.



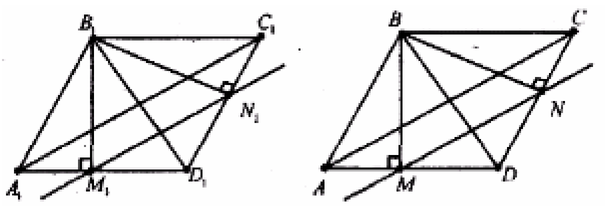
AM і BD – медіани (бісектриси, висоти) *O* - центр вписаного і описаного кіл.

Зображення паралелограма

Будь-який заданий паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ (включаючи прямокутник, квадрат, ромб) може бути зображений довільним паралелограмом *ABCD.*

На зображенні паралелограма загального виду зображення двох його висот, опущених з однієї вершини, можна побудувати довільно. Причому висоти, опущені вершини гострого кута паралелограма-оригінала, лежать поза паралелограмом, а висоти, опущені з вершини тупого кута, - всередині нього.

Якщо $A_1B_1C_1D_1$ - ромб, то на зображенні визначається пара взаємно перпендикулярних прямих - це діагоналі *ABCD.* Тому довільно можна побудувати зображення лише однієї висоти із даної вершини ромба на його сторону. При зображенні другої висоти ромба враховують, що основи цих висот лежать на прямій, паралельній діагоналі ромба. Аналогічно зображуються перпендикуляри, опущені на сторони ромба з будь-якої точки його діагоналі.



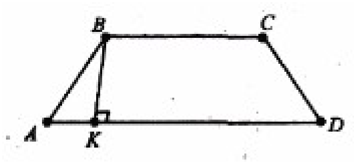
ABCD - зображення ромба $A_1B_1C_1D_1$; *BM* і *BN* - зображення висот ромба B_1M_1 і B_1N_1, $MN \parallel AC$.

Якщо $A_1B_1C_1D_1$ - квадрат, то його зображення *ABCD* (довільний паралелограм), причому зображення висот, бісектрис, кутів, перпендикулярів до сторін будувати довільно не можна.

Зображення трапеції

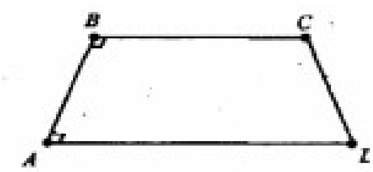
Будь-яка трапеція $A_1B_1C_1D_1$ (в тому числі і рівнобічна, прямокутна) може бути зображена довільною трапецією *ABCD.*

Якщо $A_1B_1C_1D_1$ – трапеція загального виду, то зображення її висоти і одного з перпендикулярів, опущених з точки основи на бічні сторони, можна будувати довільно.



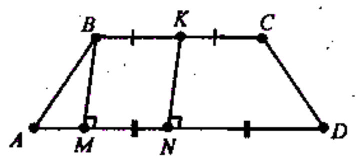
ABCD - зображення трапеції $A_1B_1C_1D_1$, *BK* - висота.

Якщо $A_1B_1C_1D_1$ - прямокутна трапеція, то $C_1B_1 \perp A_1B_1$, зображення висоти трапеції вже задано на рисунку, тому довільно може бути зображений лише перпендикуляр до похилої бічної сторони.



ABCD - зображення прямокутної трапеції $A_1B_1C_1D_1$, $CB \perp AB$.

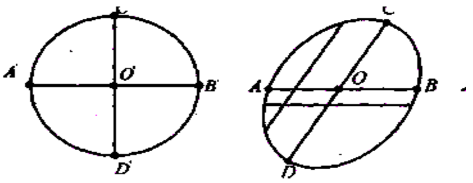
Якщо $A_1B_1C_1D_1$ - рівнобічна трапеція (має вісь симетрії), то зображенням висоти є відрізок, що з'єднує середини основ або йому паралельний.



$BK = KC; AN = DN; KN$ - зображення осі симетрії $A_1B_1C_1D_1$; $KN \perp AD$; $BM \perp AD$; $BM \perp KN$ - зображення висот трапеції $A_1B_1C_1D_1$.

Зображення кола

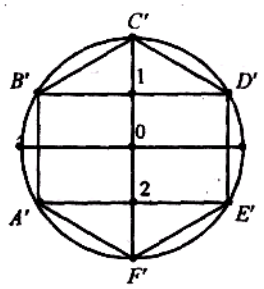
Паралельною проекцією кола є еліпс. Центром кола на зображенні є точка перетину спряжених діаметрів еліпса. Два діаметри кола (еліпса) називаються спряженими, якщо кожний з них поділяє навпіл всі хорди, паралельні другому діаметру.

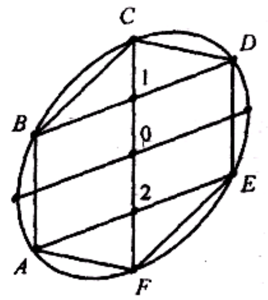


дане коло; еліпс - зображення даного кола $AB\perp CD$; $AB\perp CD$ - спряжені діаметри, C зображення центру кола є центром еліпса.

Зображення правильного шестикутника

У правильного шестикутника протилежні сторони попарно паралельні і сторона шестикутника дорівнює радіусу описаного навколо нього кола; хорди, що з'єднують симетричні відносно діаметра вершини і центр кола, поділяють цей діаметр на чотири рівні частини. Цей факт використовується при паралельному проектуванні правильного шестикутника. Дві вершини - кінці одного діаметра еліпса. Поділяємо цей діаметр на чотири рівні частини і через точки поділу 1,0,2 проводимо прямі, паралельні діаметру, спряженому даному.



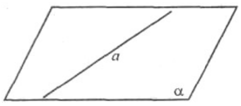
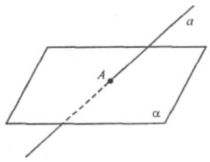
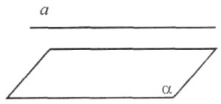


A'B'C'D'E'F' - правильний шестикутник. *ABCDEF* - зображення правил шестикутника.

Тема. Паралельність прямої і площини.

Можливі три випадки взаємного розміщення прямої і площини. Розглянемо схему взаємного розміщення прямої і площини у просторі.

Схема

Взаємне розміщення прямої і площини		
Пряма а лежить у площині α  $a \in \alpha$, безліч спільних точок, які лежать на прямій	Пряма а перетинає площину α  $a \cap \alpha, A \in a, A \in \alpha$, єдина спільна точка	Пряма а і площина α паралельні  $a \notin \alpha,\ a \not\cap \alpha,\ a \parallel \alpha$, пряма і площина не має спільних точок

Означення: Пряма і площина називаються паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Паралельність прямої а і площини α позначається так: $a \parallel \alpha$. Наочне уявлення про пряму, яка паралельна площині, дають лінії перетину стіни стелі – ці лінії паралельні площині підлоги. Відрізок називається паралельним площині, якщо він є частиною прямої, паралельної площині.

Теорема. ***Якщо пряма, яка не належить площині, паралельна якій-небудь прямій у цій площині, то вона паралельна і самій площині.***

Дано: $a \parallel b$; $b \subset a$ (рис. 1).

Довести: $a \parallel \alpha$.

Доведення

Припустимо, що $a \nparallel \alpha$. Тоді a і α мають спільну точку А.

Якщо $A \in b$, то a і b мають спільну точку А, що суперечить умові.

Якщо $A \notin b$, то a і b мимобіжні, що суперечить умові.

Отже, $a \parallel \alpha$.

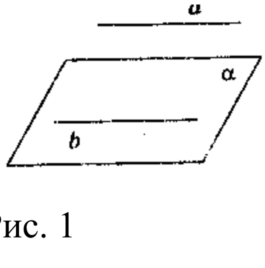


Рис. 1

Властивості прямої і площини, які паралельні між собою

Доцільно розглянути такі задачі на доведення.

Задача1. Доведіть, що якщо площина проходить через пряму, яка паралельна другій площині, і перетинає цю площину, то пряма перетину паралельна даній прямій.

Розв'язання

Нехай $a \parallel \alpha$ (рис. 2) і площина β проходить через a, b – пряма перетину площин α і β. Доведемо, що $a \parallel b$. Прямі a і b лежать в одній площині β і не перетинаються, бо в супротивному випадку пряма a перетинала б площину a, що неможливо, оскільки згідно з умовою $a \parallel \alpha$. Отже, $a \parallel b$.

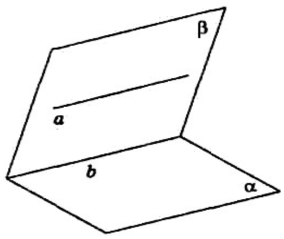


Рис. 2

Задача 2. Доведіть, що якщо через кожну із двох паралельних прямих проведено площину, причому ці площини перетинаються, то їх лінія ретину паралельна кожній із даних прямих.

Розв'язання

Нехай $a \parallel b$, пряма а лежить в площині a , пряма b лежить в площині β площини α і β перетинаються по прямій c (рис. 3). Доведемо, що $a \parallel c$, $b \parallel c$. Оскільки $a \parallel b$ і пряма b лежить в площині β , то $a \parallel \beta$ і, отже, згідно з розв'язуванням задачі 1, $a \parallel c$. Аналогічно, оскільки $a \parallel b$, a лежить в площині α , $b \parallel \alpha$ і, отже, $b \parallel c$. Таким чином, $a \parallel c$, $b \parallel c$.

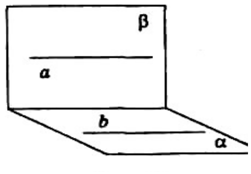


Рис.3

Задача 3. Доведіть, що якщо дві площини, що перетинаються, паралельні одній і тій самій прямій, то пряма перетину цих площин паралельна даній прямій.

Розв'язання

Нехай α і β перетинаються по прямій *c*, *a* || α, *a* || β (рис. 4). Доведемо, що *a* || *c*. Візьмемо на прямій *c* довільну точку А і через неї проведемо пряму *b*, паралельну прямій *a*. Оскільки пряма *a* || α, *a* || β, то пряма *b* лежить як в площині *a* , так і в площині β. Отже, пряма *b* – пряма, по якій перетинаються площини α і β, тому пряма *b* збігається з прямою *c*, отже, *c* || *a*.

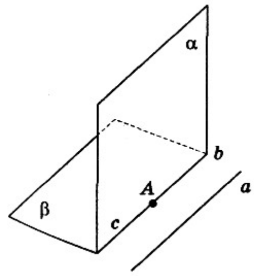
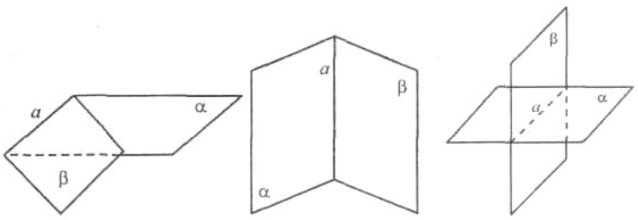
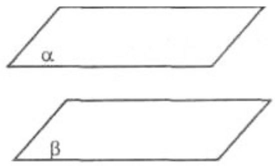


Рис. 4

Тема. Паралельність площин.

Відомо, якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій (аксіома C_2). Звідси випливає, що дві площини або перетинаються по прямій, або не перетинаються, тобто не мають спільних точок (демонструємо схему, наведену нижче).

схема

Взаємне розміщення площин у просторі	
Площини у просторі перетинаються	Площини у просторі паралельні
	
$\alpha \cap \beta; a \in \alpha; a \in \beta;$ а – пряма перетину α і β.	α і β не мають спільних точок, α ∥ β.

Дві площини називаються паралельними, якщо вони не перетинаються.

Уявлення про паралельні площини дають підлога і стеля кімнати дві протилежні стіни, поверхня стола і площина підлоги. Якщо площини α і β паралельні, пишуть: α || β.

Ознака паралельності площин

Теорема. ***Якщо дві прямі, які перетинаються однієї площини, відповідно паралельні двом прямим, які перетинаються другої площини, то ці площини паралельні між собою.***

Дано: $a_1 \subset \alpha$; $a_2 \subset \alpha$; a_1 і a_2 перетинаються в точці A; $b_1 \subset \beta$; $b_2 \subset \beta$; $a_1 \parallel b_1$; $a_2 \parallel b_2$ (рис. 1)

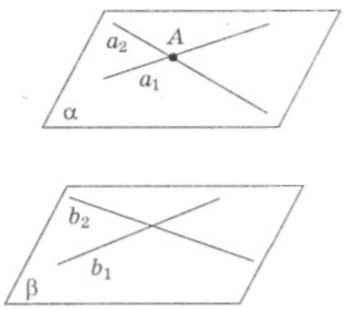


рис.1

Довести: α || β

Доведення

Припустимо, що α і β перетинаються по c. Оскільки $a_1 \parallel b_1$, то $a_1 \parallel \beta$, отже, $a_1 \parallel c$. Оскільки $a_2 \parallel b_2$, , то $a_2 \parallel \beta$, отже, $a_2 \parallel c$. Через точку A проходять дві прямі $a_1 \parallel a_2$, які паралельні c, що суперечить аксіомі паралельності. Отже, $\alpha \parallel \beta$.

Властивості паралельних площин

Теорема(про існування площини, що паралельна даній площині). ***Через точку поза даною площиною можна провести площину, паралельну даній, і до того ж тільки одну***.

Доведення розіб'ємо на дві частини.

1. Доведемо, що через точку поза даною площиною можна провести площину, паралельну даній площині.

Наводимо зразок запису доведення першої частини на дошці.

Дано: a, A $\notin$ a (рис. 2).

Довести: існує β, $\beta \parallel \alpha$, A $\in \beta$.

Доведення

Проводимо в площині α дві прямі a і b, які перетинаються.
Через точку A проведемо прямі a_1 і b_1, такі, що $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b_2$ (теорема 2.1).
Через прямі a_1 і b_1 проведемо площину β, яка паралельна α (теорема 2.4).

2. Доведемо, що через точку поза даною площиною проходить тільки одна площина, паралельна даній площині. Наводимо зразок запису доведення другої частини на дошці.

Дано: α, A$\notin\alpha$, $\beta \parallel \alpha$, A$\notin\beta$ (рис. 3).

Довести: β – єдина.

Доведення

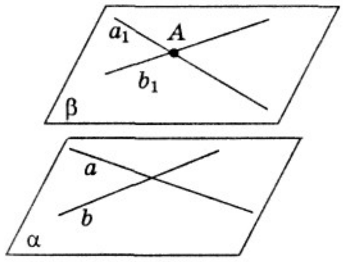
Припустимо, через точку A проходить β_1 така, що $\beta_1 \parallel \alpha$.

Візьмемо точку C таку, що C $\in \beta_1$, C $\notin \beta$.

Візьмемо точку B, B $\in \alpha$.

Через точки A, B, C проведемо γ , яка перетинає α по прямій b, β – по a, β_1 – по c.

Тоді $a \parallel b$, $c \parallel b$. Отже, через точку А проходять дві різні прямі a і c, які паралельні прямій b, що суперечить теоремі 2.1.



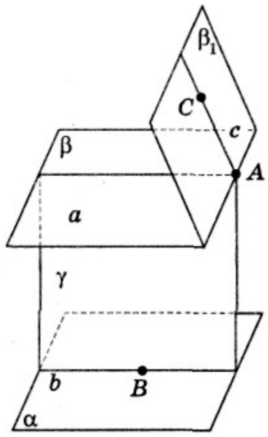


Рис. 2 Рис. 3

Теорема (властивості ліній перетину двох паралельних площин третьою площиною). ***Якщо дві паралельні площини перетинаються третьою, то прямі перетину паралельні.***

Цю теорему можна сформулювати по-іншому:

Паралельні площини перетинаються січною площиною по паралельних прямих.

Доведемо теорему. Наводимо запис, який можна зробити на дошці і в зошитах студентів.

Дано: $\alpha \parallel \beta$; γ перетинає α по прямій a; γ перетинає β по прямій b.

Довести: $a \parallel b$ (рис. 4).

Доведення

Припустимо, що $a \nparallel b$. Оскільки a і b лежать в γ, то вони перетинаються в деякій точці А; А $\in \alpha$, бо $a \subset \alpha$; А $\in \beta$, бо $b \subset \beta$. Отже, α і β перетинаються, що суперечить умові: $\alpha \parallel \beta$.

Отже, $a \parallel b$.

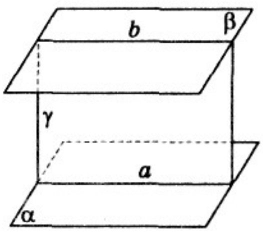


Рис. 4

Теорема (про відрізки паралельних прямих, які містяться між двома паралельними площинами). ***Відрізки паралельних прямих, які розміщені між паралельними площинами, рівні.***

Дано: $\alpha_1 \parallel \alpha_2$; $A_1 \in \alpha_1$, $B_1 \in \alpha_1$, $A_2 \in \alpha_2$, $A_1A_2 \parallel B_1B_2$.

Довести: $A_1A_2 = B_1B_2$ (рис. 5).

Доведення

Проведемо площину γ через прямі A_1A_2 і B_1B_2.

Чотирикутник $A_1B_2B_2A_2$ – паралелограм, бо $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ (за умовою), $A_1B_1 \parallel {}_2B_2$ (за теоремою про паралельність ліній перетину двох паралельних площин третьою площиною). Отже, $A_1A_2 = B_1B_2$.

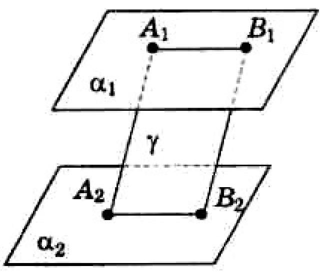


Рис. 5