Криві другого порядку

Мета: сформувати навички складання канонічних рівнянь кривих другого порядку.

Методичні вказівки з виконання і оформлення: при виконанні практичних завдань скористайтеся вивченим теоретичним матеріалом:

- еліпс та його канонічне рівняння;
- гіпербола та її канонічне рівняння;
- парабола та її канонічне рівнянння.

теоретичні питання для обговорення

1. Що називають еліпсом? Ексцентриситетом еліпса? Директрисою еліпса?

2. Що називають гіперболою? Ексцентриситетом гіперболи? Директрисою гіперболи?

3. Що називають параболою? Директрисою параболи?

Теоретична частина

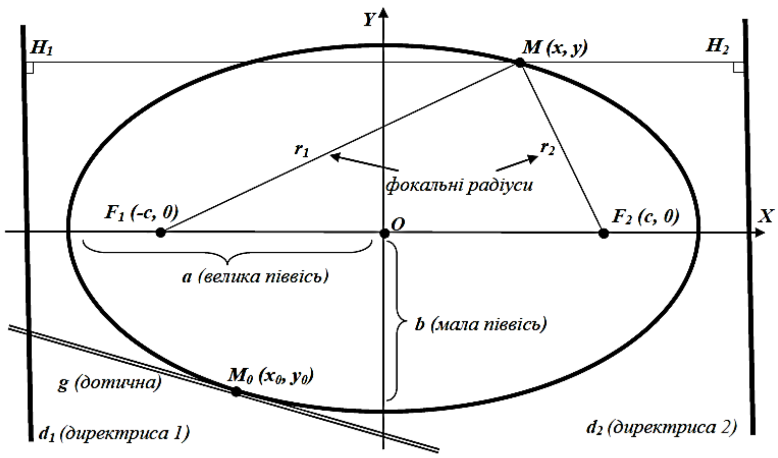
Лінією другого порядку називається лінія, яка в деякій системі координат задається рівнянням

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

До ліній другого порядку належать еліпс, гіпербола, парабола.

Для вивчення геометричних властивостей ліній другого порядку користуються їх канонічними рівняннями. До канонічних рівнянь ліній входять параметри, які безпосередньо характеризують вид і форму лінії.

еліпс



Еліпсом називається геометричне місце точок площини, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок цієї площини, що називаються фокусами, є величиною сталою: $r_1 + r_2 = 2a$.

Канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (2)$$

де $a \geq b$ (параметр a – велика піввісь еліпса, параметр b – мала піввісь).

Для поданого еліпса виконується співвідношення

$$a^2 - b^2 = c^2,$$

де $2c$ – фокусна відстань (відстань між фокусами).

Координати фокусів: $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$.

Ексцентриситет еліпса: $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$.

Рівняння директрис еліпса (розміщені зовні еліпса): $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Характеристична властивість еліпса. Відношення відстаней від будь-якої точки еліпса до його фокуса і відповідної директриси є величиною сталою і дорівнює ексцентриситету еліпса:

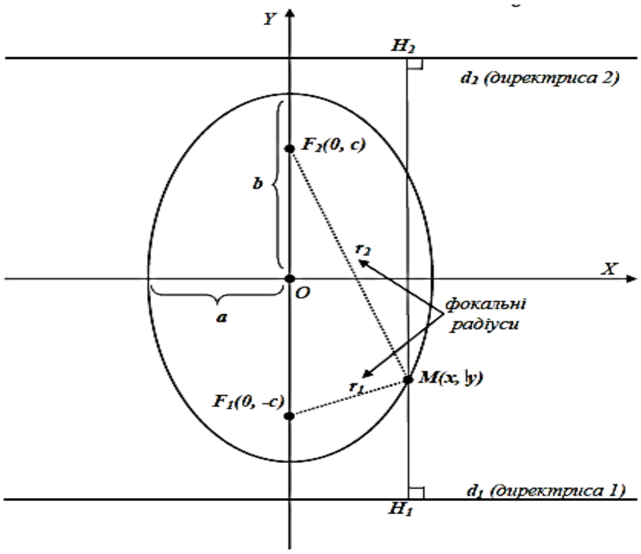
$$\frac{F_1M}{H_1M} = \varepsilon = \frac{F_2M}{H_2M}.$$

УВАГА! Якщо $a < b$, то маємо співвідношення $b^2 - a^2 = c^2$.

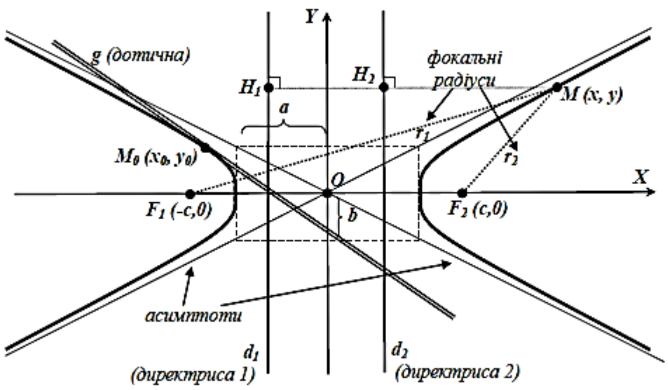
Координати фокусів: $F_1(0, -c)$ і $F_2(0, c)$.

Ексцентриситет такого еліпса $\varepsilon = \frac{c}{b} < 1$.

Рівняння директрис еліпса (розміщені зовні еліпса): $x = \pm\frac{b}{\varepsilon}$.



гіпербола



Гіперболою називається геометричне місце точок площини, різниця відстаней від яких до двох фіксованих точок цієї площини, що називаються фокусами, є величиною сталою: $r_1 - r_2 = 2a$.

Канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (3)$$

(параметр a – дійсна піввісь, параметр b – уявна піввісь гіперболи).

Для даної гіперболи виконується

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

де $2c$ – фокусна відстань (відстань між фокусами).

Координати фокусів: $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$.

Ексцентриситет гіперболи: $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$.

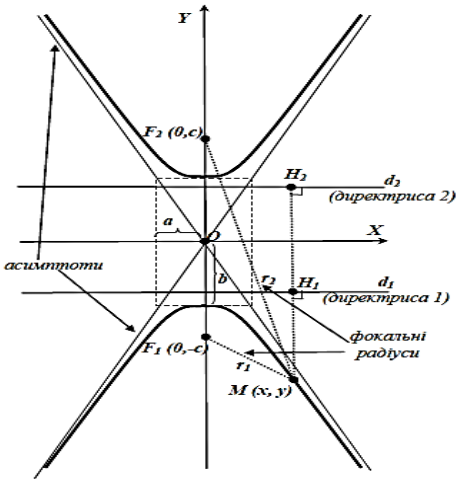
Рівняння директрис гіперболи: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Рівняння асимптот гіперболи: $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Характеристична властивість гіперболи. Відношення відстаней від будь-якої точки гіперболи до його фокуса і відповідної директриси є величиною сталою і дорівнює ексцентриситету гіперболи:

$$\frac{F_1M}{H_1M} = \varepsilon = \frac{F_2M}{H_2M}.$$

УВАГА! Гіпербола $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ називається спряженою з гіперболою $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Аналогічно маємо, що $a^2 + b^2 = c^2$.

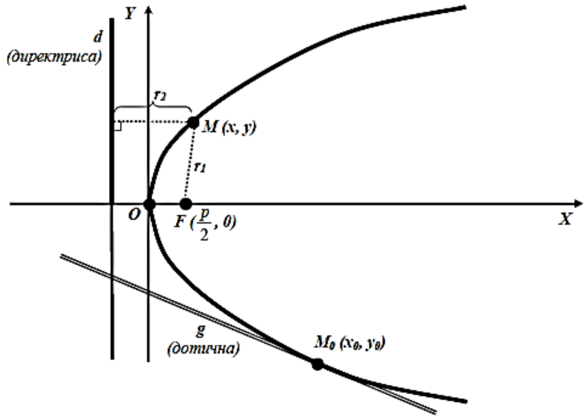
Координати фокусів: $F_1(0, -c)$ і $F_2(0, c)$.

Ексцентриситет такої гіперболи $\varepsilon = \frac{c}{b} > 1$.

Рівняння директрис: $x = \pm\frac{b}{\varepsilon}$.

Рівняння асимптот гіперболи не міняються $y = \pm\frac{b}{a}x$.

парабола



Параболою називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від даної точки (r_1), що називається фокусом, і даної прямої (r_2), що називається директрисою: $r_1 = r_2$.

Канонічне рівняння параболи:

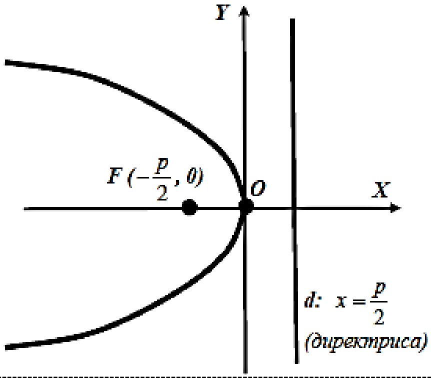
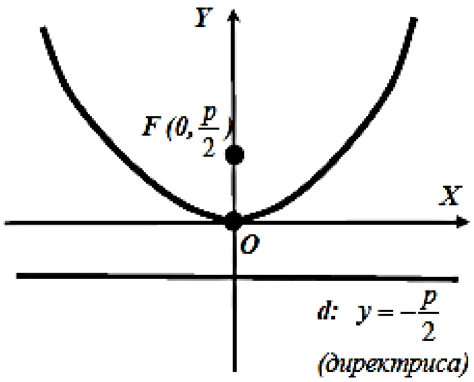
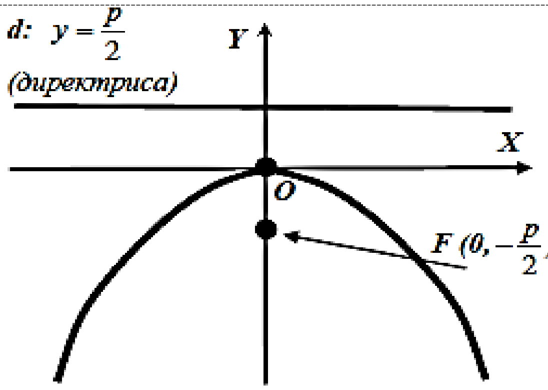
$$y^2 = 2px. \qquad (4)$$

Ексцентриситет параболи: $\varepsilon = 1$.

Дана парабола має **фокус** в точці $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

Рівняння директриси: $x = -\frac{p}{2}$.

інші випадки розміщення параболи відносно координатних осей

	$y^2 = -2px$
	$x^2 = 2py$
	$x^2 = -2py$

Оптичні властивості ліній другого порядку

1. Світлові промені, які виходять з одного фокуса еліпса, після дзеркального відбиття від еліпса проходять через його другий фокус.
2. Світлові промені, які виходять з одного фокуса гіперболи, відбившись від неї, розходяться так, що їх продовження проходять через його другий фокус гіперболи.
3. Промені, які виходять з фокуса параболи, після дзеркального відбиття від неї, ідуть паралельно до її осі.

Зразки виконання завдань на складання канонічних рівнянь ліній другого порядку та їх побудови

Приклад 1. Скласти рівняння еліпса, якщо його велика вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами дорівнює 8. Прийняти, що фокуси розташовані на осі $0x$, а вісь Оу проходить через середину відрізка між фокусами.

Розв'язання:

Рівняння еліпса у вказаній системі координат задається у вигляді (2). При цьому $a = 5$, $c = 4$. Із співвідношення $a^2 - b^2 = c^2$ одержуємо: $b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ таким чином, $b = 3$.Отже, шукане рівняння еліпса $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$.

Приклад 2. Довести, що лінія $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$ є еліпс. Знайти його вісі та координати фокусів.

Розв'язання:

Перенесемо вільний член у праву частину $9x^2 + 4y^2 = 36$ та поділимо на нього обидві частини рівняння, отримаємо: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ або $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Таким чином, дана лінія дійсно є еліпс. При цьому велика піввісь дорівнює 3, а мала – 2. Фокуси знаходяться на осі Оу. Із рівності $b^2 - a^2 = c^2$ отримуємо $c^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$. Тобто координати фокусів є: $F_1(0, -\sqrt{5})$, $F_2(0, \sqrt{5})$.

Приклад 3. Довести, що рівняння $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ є рівнянням еліпса. Знайти координати його центра, піввісі та ексцентриситет.

Розв'язання:

Виконаємо перетворення поданого рівняння, виділяючи повні квадрати:

$5x^2 - 30x = 5(x^2 - 6x) = 5((x - 3)^2 - 9) = 5(x - 3)^2 - 45;$

$9y^2 + 18y = 9(y^2 + 2y) = 9((y + 1)^2 - 1) = 9(y + 1)^2 - 9.$

Підставляючи це у дане рівняння, отримаємо:

$5(x - 3)^2 - 45 + 9(y + 1)^2 - 9 + 9 = 0$ або $5(x - 3)^2 + 9(y + 1)^2 = 45.$

Поділивши обидві частини на 45, маємо: $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1.$

Отже, отримали рівняння еліпса із зміщеним центром.

Координати центра $A(3, -1)$, поввісі $a = 3$, $b = \sqrt{5}$, ексцентриситет дорівнює: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{9-5}}{3} = \frac{2}{3}$.

Приклад 4. Скласти рівняння гіперболи, якщо її дійсна вісь розташована на осі $0x$, асимптоти мають рівняння $5x - 4y = 0$ и $5x + 4y = 0$, а відстань між вершинами дорівнює 16. Знайти координати фокусів та зробити схематичний рисунок.

Розв'язання:

Із рівнянь асимптот видно, що вони перетинаються у початку координат. Точка перетину асимптот є центром гіперболи. Таким чином, центр гіперболи знаходиться у початку координат, дійсна вісь розташована на осі $0x$ (за умовою), тоді уявна вісь – на осі $0y$ і шукана гіпербола описується канонічним рівнянням (3): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

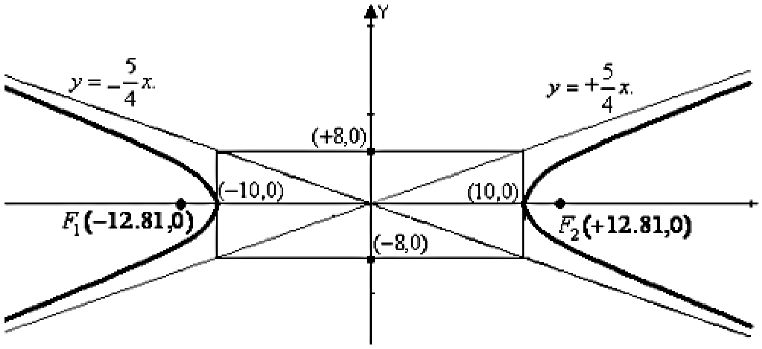
За умовою дійсна вісь (відстань між вершинами) дорівнює 16, тоді піввісь $a = 8$. Перетворюючи рівняння асимптот, отримуємо: $y = \pm\frac{5}{4}x$.

Звідси $\frac{a}{b} = \frac{5}{4}$ або $b = \frac{5}{4}a = \frac{5}{4} \cdot 8 = 10$.

Рівняння шуканої гіперболи буде мати вигляд: $\frac{x^2}{8^2} - \frac{y^2}{10^2} = 1$.

З рівності $a^2 + b^2 = c^2$ отримаємо $c^2 = 100 + 64 = 164$, $c = \sqrt{164} = 12{,}81$. Отже, координати фокусів: $F_1(-12{,}81; 0)$, $F_2(12{,}81; 0)$.

Зробимо схематичний рисунок:



Приклад 5. Встановити, що рівняння $5x^2 - 9y^2 - 20x + 9y - \frac{109}{4} = 0$ визначає гіперболу, знайти координати центра, півосі, ексцентриситет та рівняння асимптот.

Розв'язання:

Виконаємо перетворення, виділяючи повні квадрати:

$5x^2 - 20x = 5(x^2 - 4x) = 5((x-2)^2 - 4) = 5(x-2)^2 - 20$;

$-9y^2 + 9y = -9(y^2 - y) = -9\left(\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = -9\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$.

Підставляючи це у дане рівняння, отримуємо:

$5(x-2)^2 - 20 - 9\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} - \frac{109}{4} = 0$ або $5(x-2)^2 - 9\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 45$.

Поділивши обидві частини на 45, отримаємо: $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{5} = 1$.

Маємо рівняння гіперболи із зміщеним центром.

Координати центра $A\left(2, \frac{1}{2}\right)$;

Піввісі гіперболи: $a = 3$, $b = \sqrt{5}$.

Ексцентриситет дорівнює: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{\sqrt{9+5}}{3} = \frac{\sqrt{14}}{3} \approx 1{,}266$.

Рівняння асимптот: $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}x$.

Приклад 6. Скласти рівняння параболи, якщо задано фокус $F(-7{,}0)$ та рівняння директриси $x - 7 = 0$.

Розв'язання:

Приймаючи до уваги, що абсциса фокуса від'ємна, а директриса – це пряма, що перпендикулярна до вісі Oy та відсікає на вісі Ox відрізок, рівний 7, рівняння шуканої параболи має вигляд $x^2 = -2py$, а координати фокуса $F(-\frac{p}{2}, 0)$.

Оскільки $-\frac{p}{2} = -7$ одержимо $p = 14$, а шукане рівняння параболи буде мати вигляд: $x^2 = -28y$.

Приклад 7. Нехай задано рівняння $3x^2 + 2y - 6x + 5 = 0$. Привести його до канонічного вигляду.

Розв'язання:

У заданому рівнянні згрупуємо члени, що містять змінну x та виділимо повний квадрат:

$$(3x^2 - 6x) + 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 2x) + 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2 - 3 + 2y + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1)^2 + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2 + 2(y+1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = -\frac{2}{3}(y+1)$$

Отримали рівняння параболи з вершиною у точці $(1,-1)$ та гілками, що направлені до низу.

Практична частина

1. Задано рівняння лінії другого порядку:

1) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$; 2) $-16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$; 3) $x^2 - 8y = 0$.

Виконайте такі дії:

а) визначте за рівнянням тип лінії;

б) для еліпса знайдіть величину півосей, координати фокусів, ексцентриситет, складіть рівняння директрис;

в) для гіперболи визначте величину півосей, координати фокусів, ексцентриситет, складіть рівняння директрис та асимптот;

г) для параболи знайдіть значення параметра, координати фокуса, складіть рівняння директриси;

д) побудуйте криву з поданням фокусів, директрис, асимптот (за наявності).

2. Надаючи своє значення для ексцентриситету і знаючи координати фокуса F, скласти канонічне рівняння заданої лінії другого порядку.

	Координати фокуса	Задана лінія
1	$F(1,0)$;	гіпербола;
2	$F(0,-3)$;	еліпс;
3	$F(2,0)$;	парабола.

3. Встановити, які лінії визначаються наступними рівняннями та побудувати їх:

1) $9x^2 + 5y^2 - 18x + 30y + 9 = 0$; 2) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$; 3) $y = 3 - 4\sqrt{x - 1}$.