Лекція 11

Тема: Гіпербола та парабола, їх рівняння та побудова.

Мета: Ввести поняття гіперболи та параболи, ознайомити студентів з їх властивостями та побудовою.

План

1. Означення гіперболи. Канонічне рівняння гіперболи.
2. Властивості гіперболи та її асимптоти.
3. Побудова гіперболи.
4. Означення параболи. Канонічне рівняння параболи.
5. Побудова параболи.
6. Приклади розв'язування задач.

1. Означення гіперболи. Канонічне рівняння гіперболи

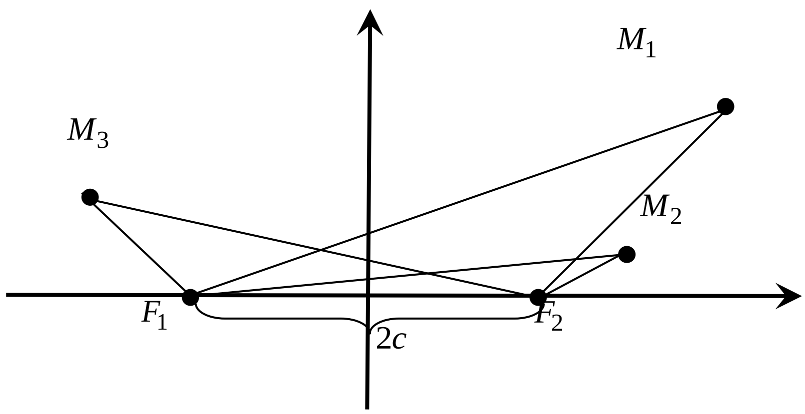
Означення. *Гіперболою* називається множина всіх точок площини, для яких модуль різниці відстаней до двох фіксованих точок площини є постійне число, причому менше за відстань між фіксованими точками і дорівнює $2a$.

Позначимо фіксовані точки F_1 і F_2.

Ці точки називають *фокусами* гіперболи, а середину відрізка F_1F_2 – *центром* гіперболи.

Позначимо відстань між фокусами через $2c$ – *фокусна відстань*.

Означення. Вісь на якій лежать фокуси гіперболи називається *фокусною* віссю або *дійсною*.



$\overrightarrow{F_1F_2} = 2c$
$|\overline{F_1M_1}| - |\overline{F_2M_1}| = 2a$
$|\overline{F_1M_2}| - |\overline{F_2M_2}| = 2a$
$|\overline{F_1M_3}| - |\overline{F_2M_3}| = 2a$
$2a < 2c \Rightarrow a < c$

Виберемо систему координат так, щоб фокуси лежали на вісі Ox симетрично відносно початку координат.

Знайдемо координати фокусів: $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$.

Нехай $M(x,y)$ – довільна точка гіперболи.

$F_1M = (x+c;y) \Rightarrow |\overline{F_1M}| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$

$F_2M = (x-c;y) \Rightarrow |\overline{F_2M}| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$|\overline{F_1M}| - |\overline{F_2M}| = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$

$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$
Позбувшись від коренів, отримаємо:
$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$
$2a<2c \Rightarrow a<c \Rightarrow c^2-a^2>0$
Позначимо через $b=\sqrt{c^2-a^2}$, тобто $a^2-c^2=-b^2$
Тоді отримаємо $-b^2x^2+a^2y^2=-a^2b^2 \Rightarrow$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (11.1)$$

канонічне рівняння гіперболи

Означення. Величина відношення половини міжфокусної відстані до великої півосі називається *ексцентриситетом* гіперболи.

$$\varepsilon=\frac{c}{a} \qquad (11.2)$$

Означення. *Директрисами* гіперболи називаються дві прямі, які в канонічній для еліпса системі координат мають рівняння

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon} \qquad (11.3)$$

2. Властивості гіперболи та її асимптоти

1. В канонічній для гіперболи системі координат, в смузі $|x|<a$ немає точок гіперболи.

2. Точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ лежать на гіперболі.

3. Гіпербола являється кривою, симетричною відносно своїх головних осей.

4. Центр гіперболи являється його центром симетрії.

Означення. Величина $2a$ називається дійсною віссю гіперболи, величина a називається дійсною піввіссю гіперболи.

Означення. Величина $2b$ називається уявною віссю гіперболи, величина b називається уявною піввіссю гіперболи.

Означення. Точки перетину гіперболи з його дійсною віссю: $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, називаються дійсними вершинами гіперболи.

Означення. Точки перетину гіперболи з його уявною віссю: $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$, називаються уявними вершинами гіперболи.

Означення. Дві пари прямих, паралельних головним осям гіперболи $x=\pm a$, $y=\pm b$ відтинають прямокутник, який називається основним прямокутником гіперболи.

Означення. Пряма називається асимптотою кривої, якщо при віддалені від початку координат відстань між ними прямую до нуля.

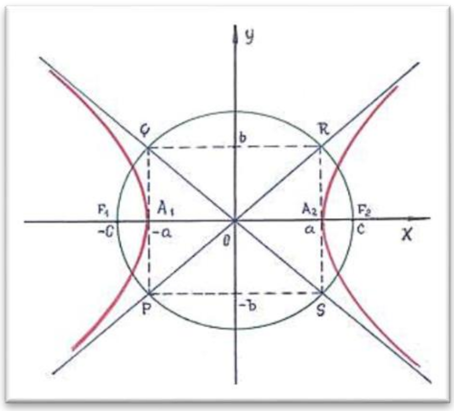
- прямі $y=\pm\frac{b}{a}x$ являються *асимптотами* гіперболи.
- $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, гіпербола, але фокус лежать на вісі $0y$, вітки направлені вгору і вниз.
- $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – гіпербола з центром, що зміщений в точку (x_0, y_0).
- нехай $c\to 0$. При цьому $\varepsilon\to 1$, $b\to 0$ і уявні вершини B_1, B_2 прямують до початку координат, асимптоти наближаються до осі $0x$. Основний прямокутник

гіперболи вироджується у відрізок A_1A_2 , а сама гіпербола вироджується в два промені на осі абсцис: $(-\infty;\ -a]$ та $[a;\ +\infty)$.

- нехай $c \to \infty$. При цьому $\varepsilon \to \infty$, $b \to \infty$ і уявні вершини B_1, B_2 прямують до нескінченності, асимптоти наближаються до осі Oy. Основний прямокутник гіперболи витягується вздовж осі ординат і вітки гіперболи наближаються до прямих $x = \pm a$ і зливаються з ними. Гіпербола вироджується у дві прямі $x = \pm a$, паралельні осі Oy.

3. Побудова гіперболи

Будуємо прямокутну систему координат. На осі Ox від початку координат відкладаємо вліво і вправо відрізки a (довільної довжини). А на осі Oy - відрізки b. Через точки на осях проводимо прямі, паралельні осям координат. Одержали прямокутник зі сторонами $2a$ і $2b$. Проведемо діагоналі прямокутника, які є асимптотами гіперболи. Через вершину $A_2(a;0)$ в першій чверті проводимо вітку гіперболи, яка асимптотично наближається до прямої $y = \frac{b}{a}x$. Інші вітки будуємо симетрично відносно Ox та Oy.

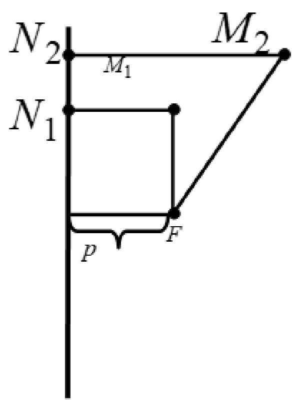


4. Означення параболи. Канонічне рівняння параболи

Означення. *Параболою* називається множина всіх точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки і фіксованої прямої.

Позначимо фіксовану точку F, цю точку називають *фокусом* параболи. Фіксовану пряму називають *директрисою* параболи.

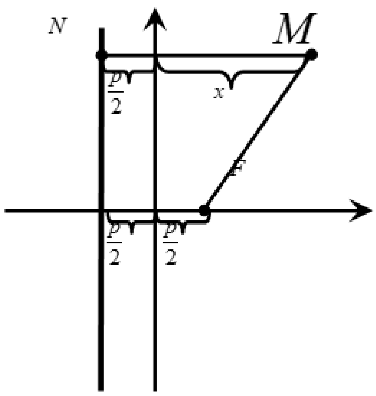
Позначимо відстань від фокуса до директриси через p.



$|\overline{NM_1}| = |\overline{FM_1}|$
$|\overline{NM_2}| = |\overline{FM_2}|$

Отримаємо рівняння параболи.

Виберемо систему координат так, щоб початок координат знаходився посередині між фокусом і директрисою, а вісь Oy була паралельна директрисі.



Тоді фокус має координати $F\left(\frac{p}{2};0\right)$

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка параболи.

$$\overline{FM} = \left(x - \frac{p}{2}, y\right) \Rightarrow |\overline{FM}| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$\overline{NM} = \frac{p}{2} + x \Rightarrow \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x$$

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2 \Rightarrow -px + y^2 = px \Rightarrow$$

$$y^2 = 2px - (p > 0) \qquad (11.4)$$

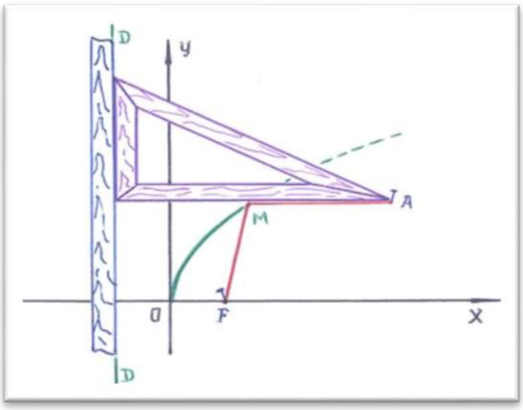
канонічне рівняння параболи

властивості параболи

- $0x$ – вісі симетрії, точок симетрії немає.
- $(0;0)$ – точка перетину з осями координат, ця точка називається вершиною параболи.
- $x = \frac{y^2}{2p}$, але $p > 0 \Rightarrow x \geq 0$, тобто парабола розташована справа від осі $0y$.
- $r = x + \frac{p}{2}$ – відстань від точки на параболі до фокуса.

5. Побудова параболи

Параболу можна накреслити, використовуючи найпростіші пристосування. Нехай параболу слід накреслити на ватмані. Для зручності закріпимо по лінії директриси DD довгу лінійку. Скористаємось достатньо великим прямокутним трикутником, у якого довгий катет буде завжди паралельним осі Ох, а менший при цьому ковзає вздовж лінійки DD. Прикріпимо нитку одним кінцем до вершини гострого кута трикутника, а іншим – до точки F. Якщо точку M забезпечити пишучим інструментом та весь час забезпечувати натяг нитки і рух точки M вздовж довгого катета (див. рисунок), то на ватмані буде викреслюватися крива лінія – парабола.



6. Приклади розв’язування задач

Приклад. Написати канонічне рівняння гіперболи , що проходить через точку $M(-9;0)$, якщо фокусна відстань дорівнює 30.

Розв’язання:

$|F_1F_2| = 30$, $c = 15$, $M(-9,0)$.

Запишемо канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Підставимо координати точки M в дане рівняння, отримаємо:

$\frac{81}{a^2} - \frac{0}{b^2} = 1, \frac{81}{a^2} = 1, a^2 = 81, -b^2 = 81 - 225, b^2 = 144.$
$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = 1.$

Приклад. Для даної гіперболи $9x^2 - 16y^2 = 144$ визначте її піввісі, координати вершин і фокусів.

Розв'язання:

$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}$, розділимо обидві частини поданого рівняння на 144, отримаємо: $\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}$ або $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. З даного рівняння визначаємо: $a = 4$, $b = 3$.

Якщо $x = 0$, то точок перетину немає.

Якщо $y = 0 \Rightarrow 9x^2 = 144 \Rightarrow x = \pm 4$. $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$ – координати вершин параболи.

$-b^2 = a^2 - c^2; -9 = 16 - c^2, c = \pm 5$

$F_1(-5; 0)$ і $F_2(5; 0)$.

Приклад. Дана парабола $y^2 = 3x$. Знайти точки параболи, відстань від яких до фокуса дорівнює 1.

Розв'язання:

Так, як $2p = 3$, то $\frac{p}{2} = \frac{3}{4}$ і фокус параболи знаходиться в точці $F\left(\frac{3}{4}, 0\right)$.

Нехай $M(x, y)$ – шукана точка. Тоді, згідно умови маємо $x + \frac{3}{4} = 1$.

Отже для знаходження координати точки М необхідно розв'язати систему:

$$\begin{cases} x + \frac{3}{4} = 1, \\ y^2 = 3x. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему отримаємо:

$x = \frac{1}{4}$;

$y^2 = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Таким чином, існує дві точки, відстань яких до фокуса дорівнює 1:

$\left(\frac{1}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ і $\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

питання для самоконтролю

1. Що називають гіперболою?
2. Як записати канонічне рівняння гіперболи?
3. Що називають фокусами гіперболи?
4. Що називають ексцентриситетом гіперболи?
5. Що називають вершинами гіперболи?
6. Що називають малою піввіссю; великою піввіссю?
7. Що називають директрисами гіперболи?

8. Що називають параболою?

9. Як записати канонічне рівняння параболи?

10. Що називають фокусом параболи?

11. Що називають вершиною параболи?

12. Що називають директрисою параболи?

тестові завдання

Варіант 1

1. Яке з поданих рівнянь, є рівнянням гіперболи, фокуси якої розташовані на осі Oy симетрично відносно початку координат, якщо рівняння асимптот $y = \pm\frac{12}{5}x$ і відстань між вершинами дорівнює 48.

а) $-\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{36}=1$; б) $-\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{576}=1$; в) $-\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{36}=1$.

2. Яке з поданих рівнянь являється рівнянням параболи, вершина якої знаходиться у початку координат, якщо парабола розташована у лівій півплощині симетрично відносно Ox і проходить через точку $A(-4;\ 2)$.

а) $-y^2=2x$; б) $y^2=-x$; в) $y^2=-2x$; г) $y^2=x$

3. Для гіперболи $16x^2-9y^2=-144$ знайти півосі a, b, фокуси, ексцентриситет, рівняння директрис, рівняння асимптот.

а) 1) $a=3;\ b=4$; 2) $F\ (0;\pm 5)$; 3) $\varepsilon=5/4$; 4) рівняння директрис $y=\pm\frac{4}{3}x$;

б) 1) $a=2;\ b=3$; 2) $F\ (0;\pm 2)$; 3) $\varepsilon=5/4$; 4) рівняння директрис $y=\pm\frac{1}{3}x$.

4. Яке з поданих рівнянь являється рівнянням параболи, вершина якої знаходиться у початку координат, якщо парабола розташована у нижній півплощині симетрично відносно Oy і проходить через точку $A(-6;\ 6)$.

а) $x^2=-6y$; б) $x^2=-4y$; в) $x^2=-2y$; г) $x^2=-y$.

5. При яких значеннях c гіпербола вироджується в дві прямі паралельні Oy:

а) $c\to 0$; б) $c\to\infty$; в) $c\to a$.

6. Яку лінію визначає рівняння $x^2+4x-4y+8=0$.

а) парабола $(x-1)^2=4(y-1)$ з вершиною у $C(1;\ -2)$, параметр $p=2$;

б) коло $(x+2)^2+(y-1)^2=4$ з центром у $C(-2;\ 1)$, радіусом 2;

в) парабола $(x+2)^2=4(y-1)$ з вершиною у $C(-2;\ 1)$, параметр $p=2$;

г) коло $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ з центром у $C(-1;\ 2)$, радіусом 4.

Варіант 2

1. Яке з поданих рівнянь являється рівнянням параболи, вершина якої знаходиться у початку координат, якщо парабола розташована в правій півплощині симетрично відносно Ox та її параметр $p=3$.

а) $y^2=4x$; б) $y^2=8x$; в) $y^2=6x$.

2. Яке з поданих рівнянь, є рівнянням гіперболи, фокуси якої розташовані на осі Oy симетрично відносно початку координат, якщо рівняння асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ і відстань між вершинами дорівнює 6,4.

а) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; б) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{25} = 1$; в) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

3. Яке з поданих рівнянь являється рівнянням параболи, вершина якої знаходиться у початку координат, якщо парабола розташована у верхній півплощині симетрично відносно Oy та її параметр $p = 0{,}25$.

а) $x^2 = 0{,}3y$; б) $x^2 = 2y$; в) $x^2 = 4y$; г) $x^2 = 0{,}5y$.

4. Яку лінію визначає рівняння $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

а) гіпербола $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1$, центр $C(-1;\ 2)$, півосі $a = 4$; $b = 3$;

б) гіпербола $-\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$, центр $C(2;\ -1)$, півосі $a = 3$; $b = 4$;

в) еліпс $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$, центр $C(2;\ -1)$, півосі $a = 3$; $b = 4$.

5. Яку лінію визначає рівняння $x = 4 + \sqrt{y + 5}$.

а) коло з центром $(4; -5)$ та радіусом $\frac{9}{2}$;

б) парабола з вершиною у $\mathrm{C}(4; -5)$, параметр $p = \frac{9}{2}$;

в) парабола з вершиною у $\mathrm{C}(-4; 5)$, параметр $p = 9$;

г) коло з центром $(-5; -4)$ та радіусом 9.

6. При яких значеннях c гіпербола вироджується в два промені на осі Ox:

а) $c \to 0$; б) $c \to \infty$; в) $c \to a$.

література

1. Яковлев Г.Н., Каченовский М.И., Колягин Ю.М. Алгебра і початки аналізу, частина I. М.: Наука, 1987.

2. Яковлев Г.Н., Каченовский М.И., Колягин Ю.М. Алгебра і початки аналізу, частина II. М.: Наука, 1987.

3. Г.Н. Яковлєв. Геометрія . М.: Наука, 1987.

4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1989.

5. Богомолов М.Б. Практичні заняття з математики. Київ: Вища школа, 1983. Н.М.

6. І.І. Валуце, Г.Д. Ділігул. Математика для технікумів. М. Высшая школа, 1983.