Лекція 10

Тема: Криві другого порядку: коло та еліпс, їх рівняння та побудова.

Мета: Узагальнити поняття кола, ввести поняття еліпса, ознайомити студентів з його властивостями, канонічним рівнянням та побудовою.

План

1. Поняття лінії другого порядку.
2. Коло та його рівняння.
3. Еліпс та його канонічне рівняння.
4. Властивості еліпса.
5. Побудова еліпса.
6. Приклади розв'язування задач.

1. Поняття лінії другого порядку

Криві другого порядку – множина точок, координати яких задовольняють рівняння виду:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (10.1)$$

Лінії, координати точок яких задовольняють рівняння (10.1) називають лініями другого порядку. До ліній другого порядку відносяться: еліпс (зокрема коло), гіпербола, парабола. Вони описуються рівнянням (10.1). При відповідному виборі декартової системи координат рівняння (10.1) для кривих другого порядку набувають простий, так званий канонічний вигляд. Розглянемо кожну із кривих другого порядку.

2. Коло та його рівняння

Означення. *Колом* називається множина точок площини, які знаходяться на відстані R (*радіусу кола*) від заданої точки площини (*центра кола*).

Нехай $M_0(x_0; y_0)$ – центр кола, $M(x; y)$ – довільна точка кола. Згідно означення $M_0M = R$, а за формулою відстані між двома точками маємо:

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \qquad (10.2)$$

Рівняння кола радіусом R і з центром у точці $M_0(x_0; y_0)$.

Якщо центр кола збігається з початком координат, то рівняння кола запишеться у вигляді:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (10.3)$$

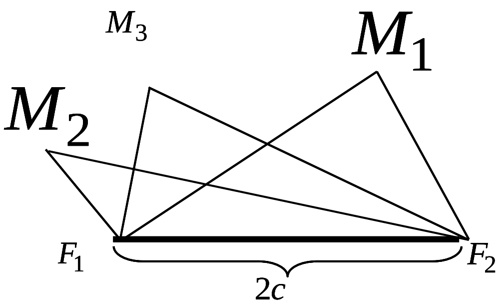
3. Еліпс та його канонічне рівняння

Означення. *Еліпсом* називається множина всіх точок площини, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок є число постійне і дорівнює $2a$.

Позначимо фіксовані точки F_1 і F_2. Ці точки називають *фокусами* еліпса, а середину відрізка F_1F_2 – *центром* еліпса.

Позначимо відстань між фокусами через $2c$ – *фокусна відстань*.

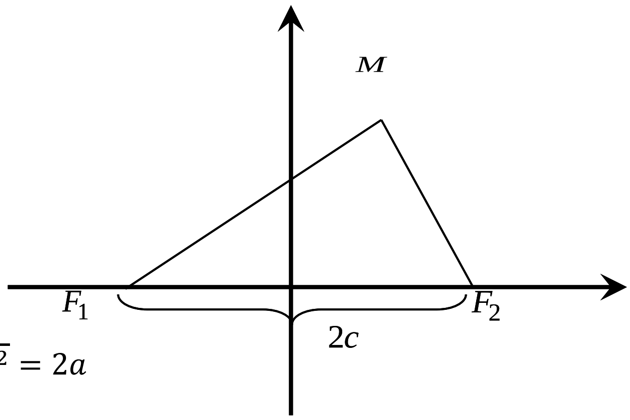
Лекція 10



$|\overline{F_1F_2}| = 2c$
$|\overline{F_1M_1}| + |\overline{F_2M_1}| = 2a$
$|\overline{F_1M_2}| + |\overline{F_2M_2}| = 2a$
$|\overline{F_1M_3}| + |\overline{F_2M_3}| = 2a$
$2a > 2c \Rightarrow a > c$

Для того, щоб отримати рівняння еліпса, виберемо систему координат так, щоб фокуси лежали на осі Ox симетрично відносно початку координат.

Знайдемо координати фокусів:
$|\overline{F_1F_2}| = 2c \Rightarrow F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$



Нехай $M(x, y)$ – довільна точка еліпса.
$F_1M = (x + c; y) \Rightarrow |\overline{F_1M}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$
$F_2M = (x - c; y) \Rightarrow |\overline{F_2M}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$|\overline{F_1M}| + |\overline{F_2M}| = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$, $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$
Позбудемось кореня, піднісши обидві частини рівняння до квадрату, отримаємо:
$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$;
Після спрощення виразу отримаємо: $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$. Знову піднесемо обидві частини до квадрату: $a^2((x-c)^2 + y^2) = (a^2 - cx)^2$;
$a^2x^2 - 2ca^2x + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2ca^2x + c^2x^2$;
$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$; поділимо на $a^2(a^2 - c^2)$.
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1.$
Позначимо через $a^2 - c^2 = b^2$
Тоді отримаємо

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (10.4)$$

канонічне рівняння еліпса

Означення. Величина відношення половини міжфокусної відстані до великої півосі називається *ексцентриситетом* еліпса.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \qquad (10.5)$$

Означення. *Директрисами* еліпса називаються дві прямі, які в канонічній для еліпса системі координат мають рівняння

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}, x = \pm\frac{a^2}{c} \qquad (10.6)$$

Лекція 10

4. Властивості еліпса

1. В канонічній для еліпса системі координат, всі точки еліпса знаходяться в прямокутнику $|x| \le a$, $|y| \le b$.
2. Точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ – лежать на еліпсі.
3. Еліпс є кривою, симетричною відносно своїх головних осей.
4. Центр еліпса є його центром симетрії.

Означення. Величина $2a$ називається великою віссю еліпса, величина a називається великою піввіссю еліпса.

Означення. Величина $2b$ називається малою віссю еліпса, величина b називається малою піввіссю еліпса.

Означення. Точки перетину еліпса з його головними осями називаються вершинами еліпса.

дослідження форми еліпса

Засобами математичного аналізу можна дослідити на зростання і спадання, на випуклість і вгнутість.

Якщо $|x|$ збільшується, то $|y|$ – зменшується.

Нехай $a = b = r$, $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$

Так як $b^2 = a^2 - c^2$ і $a = b$, то $c = 0$. Фокуси F_1 і F_2 співпадають => множина точок рівновіддалених від фокуса => коло.

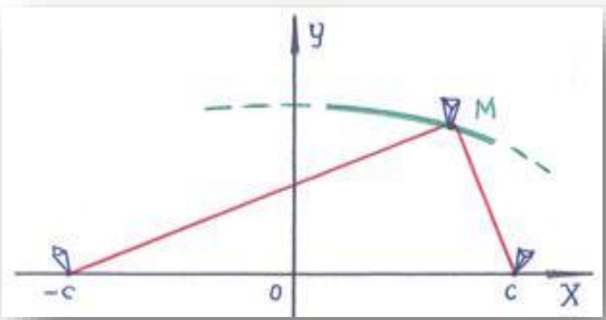
Якщо $c \to a$, то $\varepsilon \to 1$, $b \to 0$, еліпс вироджується у відрізок A_1A_2 (велика піввісь).

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, але $a < b$ – еліпс, але фокуси лежать на осі $0y$.

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ – еліпс з центром, що зміщений в точку $(x_0; y_0)$.

5. Побудова еліпса

З канонічного рівняння еліпса знаходимо півосі a та b. Будуємо фокуси еліпса і закріплюємо в них кінці нерозтяжної нитки. Натягуючи вістрям олівця нитку, водимо вістрям по площині таким чином, щоб нитка ковзала по вістрю. Олівець при цьому опише півеліпс. Відтягуючи нитку в протилежний бік, креслимо другу половину еліпса.



6. Приклади розв'язування задач

Приклад. Написати канонічне рівняння еліпса, що проходить через точку $M(5;\ 0)$, якщо фокусна відстань дорівнює 6.

Розв'язання:

Згідно умови задачі $2c = 6$, тоді $c = 3$. Запишемо канонічне рівняння еліпса у загальному вигляді $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Підставимо координати точки M у канонічне рівняння еліпса, отримаємо: $\frac{25}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1$.

З даного рівняння знайдемо a. $\frac{25}{a^2} = 1$, $a^2 = 25$.

Використовуючи формулу $a^2 - c^2 = b^2$, знайдемо b^2.

$b^2 = 25 - 9 = 16$.

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Приклад. Написати канонічне рівняння еліпса, якщо його фокус знаходиться в точці (6; 0) і вісь ординат еліпс перетинає в точці $(0;\ -3)$.

Розв'язання:

Згідно умови задачі $F_1(6; 0)$, отже $c = 6$. Запишемо канонічне рівняння еліпса у загальному вигляді $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Підставимо координати точки M у канонічне рівняння еліпса, отримаємо: $\frac{0}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1$. Звідки $b^2 = 9$. З формули $b^2 = a^2 - c^2$, знайдемо a^2: $a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 36 = 45$. Отже шукане рівняння еліпса має вигляд: $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{9} = 1$

Приклад. Для даного еліпса $9x^2 + 16y^2 = 144$ визначте його піввісі, координати вершин і фокусів.

Розв'язання:

перетворимо дане рівняння до канонічного вигляду:

$\frac{9x^2}{144} + \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}$; $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

$a = \sqrt{16} = 4$, $b = \sqrt{9} = 3$

Якщо $x = 0$, то $16y^2 = 144$, $y = \pm 3$.

Якщо $y = 0$, то $9x^2 = 144$, $y = \pm 4$.

$A(0; 3)$, $B(0; -3)$, $C(-4; 0)$, $D(4; 0)$

$b^2 = a^2 - c^2$, $9 = 16 - c^2$, $c = \pm\sqrt{7}$

$F_1(-\sqrt{7}; 0)$, $F_2(\sqrt{7}; 0)$

питання для самоконтролю

1. Що називають еліпсом?
2. Як записати канонічне рівняння еліпса?
3. Що називають фокусами еліпса?
4. Що називають ексцентриситетом еліпса?
5. Що називають вершинами еліпса?
6. Що називають малою піввіссю; великою піввіссю?
7. Що називають директрисами еліпса?

тестові завдання

1. Визначити на якій осі знаходяться фокуси еліпсу $16x^2 + 25y^2 = 400$:
а) на осі $0x$; б) на осі $0y$; в) ні на одній з осей координат.

2. Визначити на якій осі знаходяться фокуси еліпсу $49x^2 + 4y^2 = 400$:
а) на осі Ox; б) на осі Oy; в) ні на одній з осей координат.

3. Яке з рівнянь відповідає рівнянню еліпса, фокуси якого лежать на осі O*x*, симетрично відносно початку координат, якщо більша вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $\varepsilon = 0{,}6$.

а) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$; б) : $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{8} = 1$; в) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.

4. Яке з рівнянь відповідає рівнянню еліпса, фокуси якого лежать на осі O*x*, симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами дорівнює 4, а відстань між директрисами дорівнює 5.

а) $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$; б) $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$; в) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

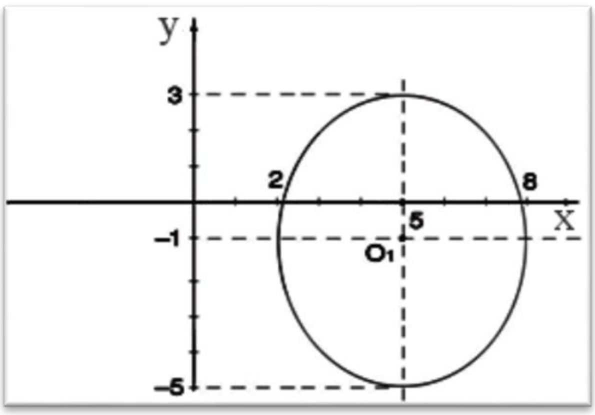
5. Яке з рівнянь відповідає рівнянню еліпса, фокуси якого лежать на осі O*x*, симетрично відносно початку координат, якщо відстань між директрисами дорівнює 32 і $\varepsilon = 0{,}5$.

а) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$; б) $\frac{x^2}{23} + \frac{y^2}{21} = 1$; в) $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{24} = 1 \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{24} = 1$.

6. Для еліпса $9x^2 + 25y^2 = 225$ знайти 1) півосі; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння директрис.
а) 1) $a = 5$; $b = 3$; 2) $F(\pm 4;\ 0)$; 3) $\varepsilon = \frac{4}{5}$; 4) $x = \pm\frac{25}{4}$;
б) 1) $a = 2$; $b = 1$; 2) $F(\pm 2;\ 0)$; 3) $\varepsilon = \frac{4}{5}$; 4) $x = \pm\frac{5}{2}$.

7. Яку лінію визначає рівняння $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$:
а) еліпс $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$, центр $C(-2;\ 1)$, півосі $a = 4$; $b = 5$;
б) гіпербола $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$, центр $C(-1;\ 2)$, півосі $a = 5$; $b = 4$;
в) еліпс $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$, центр $C(-1;\ 2)$, півосі $a = 5$; $b = 4$;
г) гіпербола $\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$, центр $C(-2;\ 1)$, півосі $a = 4$; $b = 5$.

8. Вибрати рівняння еліпса, представленого на рисунку:



Лекція 10

а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$; б) $\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$; в) $\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$; г) $\frac{(x+5)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$.

9. Центром еліпса називається:

а) центр перетину осей; б) вісь, на якій лежать фокуси; в) центра немає.

10. Співставте:

1) $y^2=9-3x^2$	а) рівняння гіперболи;
2) $x^2-9=3y^2$	б) рівняння параболи;
3) $y^2=9x$	в) рівняння еліпса.

література

1. Яковлев Г.Н., Каченовский М.И., Колягин Ю.М. Алгебра і початки аналізу, частина І. М.: Наука, 1987.

2. Яковлев Г.Н., Каченовский М.И., Колягин Ю.М. Алгебра і початки аналізу, частина ІІ. М.: Наука, 1987.

3. Г.Н. Яковлєв. Геометрія . М.: Наука, 1987.

4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1989.

5. Богомолов М.Б. Практичні заняття з математики. Київ: Вища школа, 1983. Н.М.

6. І.І. Валуце, Г.Д. Ділігул. Математика для технікумів. М. Высшая школа, 1983.