# Первісна функція та її властивості

*теоретичний матеріал*

Функція $F(x)$ називається *первісною* функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо для всіх $x$ із цього проміжку виконується рівність: $F'(x) = f(x)$.

**Наприклад:**

функція $F(x) = \sin x$ є первісною функції $f(x) = \cos x$ для $x \epsilon R$, бо $(\sin x)' = \cos x$;

функція $F(x) = \operatorname{tg} x$ є первісною функції $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, бо $F'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = f(x)$ для всіх $x$ крім $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

## Основна властивість первісних

Розглянемо наступний приклад.

Довести, що функції $F_1(x) = \frac{x^3}{3}$, $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 2$, $F_3(x) = \frac{x^3}{3} - 5$ є первісними функції $f(x) = x^2$.

$$F_1'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2 = f(x), \qquad F_2'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 2\right)' = x^2 + 0 = x^2 = f(x),$$

$$F_3'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - 5\right)' = x^2 + 0 = x^2 = f(x).$$

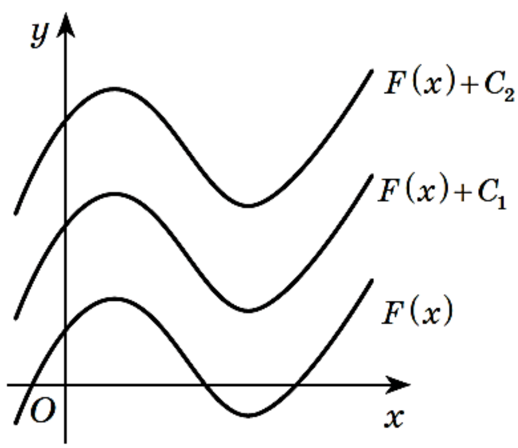
Взагалі будь-яка функція $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, де $C$ – постійна, є первісною функції $x^2$. Це випливає з того, що похідна постійної дорівнює нулю.

Отже, будь-яка первісна для функції $f(x)$ на проміжку $P$ може бути записана у вигляді $F(x) + C$, де $F(x)$ – одна з первісних для функції $f(x)$ на проміжку $P$, а $C$ – довільна стала.

**$F(x) + C$ – загальний вигляд первісних для функції $f(x)$ на проміжку $P$.**

## Геометрична інтерпретація основної властивості первісних

Графіки будь-яких двох первісних для функції $f(x)$ отримують один з одного паралельним перенесенням уздовж осі $Oy$ (див. рисунок). Для даної функції $f(x)$ існує ціле сімейство первісних $F(x) + C$.




Для стислості в разі знаходження первісної функції $f(x)$проміжок, на якому задана $f(x)$, зазвичай не вказують. На увазі маються проміжки якомога більшої довжини. Зокрема, якщо $f(x)$ визначено на множині $R$ і проміжок не вказаний, то мається на увазі, що $F(x)$ також розглядається на множині $R$.

## Правила знаходження первісних

**Знаходження первісної називається операцією інтегрування.**

Користуючись таблицею похідних, можна скласти таблицю первісних для функцій, похідні яких відомі. Щоб обґрунтувати цю таблицю, треба диференціювати функції, які стоять у правій колонці.

| Функція $f(x)$ | Загальний вигляд первісних $F(x)+C$ |
|---|---|
| $0$ | $C$ |
| $k$ | $kx+C$ |
| $x^n (n \neq -1)$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x}+C$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert+C$ |
| $\sin x$ | $-\cos x+C$ |
| $\cos x$ | $\sin x+C$ |
| $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\operatorname{tg} x+C$ |
| $\frac{1}{\sin^2 x}$ | $-\operatorname{ctg} x+C$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x$ | $\frac{a^x}{\ln a}+C$ |

**Правило 1.** Якщо $F(x)$ і $G(x)$ – первісні відповідно функцій $f(x)$ і $g(x)$ на деякому проміжку, то функція $y=F(x)\pm G(x)$ є первісною функції $y=f(x)\pm g(x)$.

Дійсно, оскільки $(F(x)\pm\, G(x))' = \, f(x)\pm\, g(x)$.

**Правило 2.** Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, а $C$ – стала, то $y=CF(x)$ – первісна для функції $y=Cf(x)$.

Дійсно, оскільки $(CF(x))'=CF'(x)=Cf(x)$.

**Правило 3.** Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, а $k$ і $b$ – постійні числа, причому $k\neq 0$, то $y=\frac{1}{k}F(kx\;+b)$ є первісною для функції $y=f(kx+b)$.

Дійсно, за правилом похідної складеної функції маємо:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k = F'(kx+b) = f(kx+b).$$

*приклади розв'язування завдань*

**Приклад 1.** Знайти загальний вид первісної для функції $f(x)=x+\cos x$.

Розв'язання:

Згідно правила 1 знаходимо первісну (за допомогою таблиці первісних) для кожного доданку: $F(x)=\frac{x^2}{2}+\;\sin x+C$.

**Приклад 2.** Знайти загальний вид первісної для функції $f(x) = e^x + \sin x - \frac{1}{x}$.
Розв'язання:
$F(x) = e^x - \cos x - \ln|x| + C$.

**Приклад 3.** Знайти загальний вид первісної для функції $f(x) = 5e^x + 7\sin x - 3x^2$.
Розв'язання:
Застосуємо правило 1 та правило 2: $F(x) = 5e^x - 7\cos x - x^3$.

**Приклад 4.** Знайти загальний вид первісної для функції $f(x) = 1 + 3e^x - 4\cos x$.
Розв'язання:
$F(x) = x + 3e^x - 4\sin x + C$.

**Приклад 5.** Знайти загальний вид первісної для функції:

а) $f(x) = (7 - 3x)^5$; б) $f(x) = e^{2x-1}$.

Розв'язання:
Згідно правила 3, маємо:

а) $F(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(7-3x)^6}{6} + C = -\frac{(7-3x)^6}{18}$; б) $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x-1} + C$.

**Приклад 6.** Знайти загальний вид первісної для функції: $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}$.
Розв'язання:

Зробимо деякі перетворення функції: $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}} = (3x-1)^{-\frac{1}{3}}$.

Знаходимо первісну: $F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-1)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}(3x-1)^{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x-1)^2} + C$.

**Приклад 7.** Знайдіть загальний вигляд первісних для функцій:

а) $f(x) = 2x^5 - 5x^2$; б) $f(x) = \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}$; в) $f(x) = 5\sqrt[4]{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$.

Розв’язання:
а) $F(x) = 2 \cdot \frac{x^6}{6} - 5 \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^6 - 5x^3}{6} + C$;
б) $f(x) = \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}}$;
$F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 3 \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{9x^{\frac{4}{3}}}{4} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$;
в) $f(x) = 5\sqrt[4]{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = 5x^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = 5x^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = 5x^{\frac{1}{4}} - x^{-\frac{3}{2}}$;
$F(x) = 5 \cdot \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} - \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = 4x^{\frac{5}{4}} + \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} + C = 4\sqrt[4]{x^5} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C$.

**Приклад 8.** Знайдіть загальний вигляд первісних для функцій:

а) $f(x) = 5\cos x - 3\sin x$; б) $f(x) = 2e^x + 3\cos x$; в) $f(x) = x + 10^x$.

Розв’язання:
а) $F(x) = 5\sin x + 3\cos x + C$;
б) $F(x) = 2e^x + 3\sin x$;
в) $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{10^x}{\ln 10} + C$.

*завдання для самостійного розв’язання*

1.Знайдіть всі первісні для функції:

а) $f(x) = 5$; б) $f(x) = x^5$; в) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; г) $f(x) = 10^x$; д) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

2.Запишіть первісні для функцій:

а) $x^7$; б) $\frac{1}{x}$; в) $\frac{1}{x^3}$; г) $\sqrt[5]{x}$; д) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; е) $e^x$;

є) $\pi^x$; ж) $\frac{1}{\cos^2 x}$; з) $\frac{1}{\sin^2 x}$; і) $\cos x$; к) $\sin x$; л) $x\sqrt{x}$.

3. Доведіть, що функція $F$ є первісною для функції $f$.

а) $F(x) = \cos^2 x$, $f(x) = -\sin 2x$, $x \in R$; б) $F(x) = 6 - \operatorname{ctg} 3x$, $f(x) = \frac{3}{\sin^2 3x}$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

4. Знайти загальний вид первісної для функції:

а) $f(x) = (3x-2)^5$; б) $f(x) = \cos 4x$; в) $f(x) = \sin\left(6x + \frac{\pi}{8}\right)$;

г) $f(x) = \frac{4}{\sin^2 \frac{x}{3}}$; д) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{\cos^2 4x}$ е) $f(x) = \sqrt{7x+1}$.