Найбільше та найменше значення функції на проміжку

теоретичний матеріал

Розглянемо рисунки 1 і 2, на яких зображено графіки функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, заданих на відрізку $[a; b]$. Функція $y = f(x)$ зростає, а функція $y = g(x)$ спадає. На відрізку $[a; b]$ найменше значення функції $y = f(x)$ дорівнює $f(a)$, а найменше значення функції $y = g(x)$ дорівнює $g(b)$. Відповідно найбільші значення цих функцій на даному відрізку дорівнюють $f(b)$ та $g(a)$. Отже, якщо функція неперервна і зростає (спадає) на деякому відрізку, то найбільше і найменше значення функція набуває на кінцях цього відрізка.

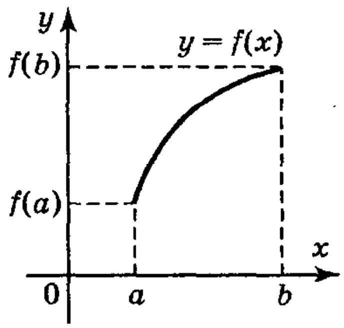


Рис.1

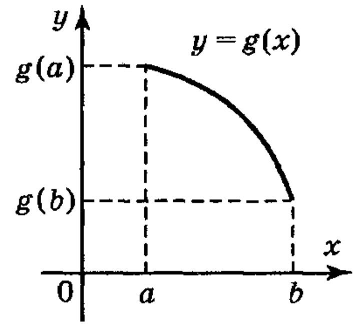
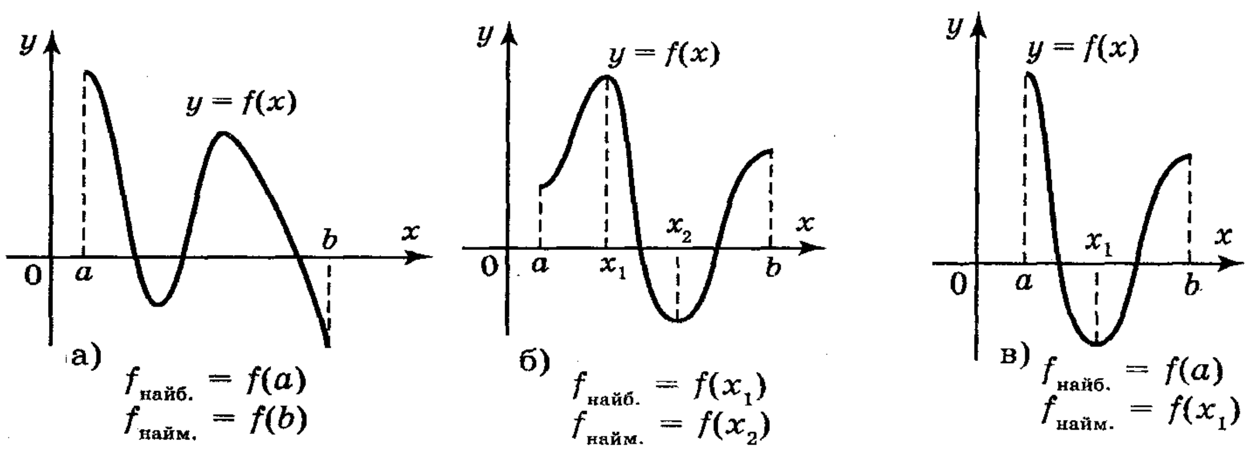


Рис.2

Розглянемо рисунок 3, на якому зображено графіки трьох функцій. Аналіз цих графіків свідчить, що найбільше і найменше значення функцій неперервних і диференційованих на проміжку $[a; b]$ досягаються цими функціями або на кінцях відрізка, або в стаціонарних точках.



Отже, неперервна і диференційована функція на заданому відрізку приймає найбільше і найменше значення в стаціонарних точках або на кінцях відрізка.

Таким чином, якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і має похідну в кожній внутрішній точці цього відрізку, то для знаходження найбільшого і найменшого значень функції на відрізку $[a; b]$ треба:

Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень для функції $y = f(x)$, диференційованої на проміжку $[a; b]$

1) знайти значення функції на кінцях проміжку, тобто числа $f(a)$ і $f(b)$;
2) знайти значення критичних точок на проміжку $[a; b]$;
3) знайти значення функції у вибраних критичних точках;
4) із знайдених значень вибрати найбільше і найменше.

Схема використання правил знаходження найбільшого і найменшого значення функції при розв'язуванні прикладних задач.

1) задачу «переводять» на мову функцій. Для цього вибирають зручний параметр x, через який виражають як функцію $y = f(x)$ величину, яка нас цікавить;

2) засобами аналізу знаходять найбільше чи найменше значення цієї функції на деякому проміжку;

3) з'ясовують, який практичний зміст (у межах даної задачі) має отриманий (на мові функцій) результат.

приклади розв'язування завдань

Завдання 1. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x + e^{-x}$ на відрізку $[-1; 2]$.
Розв'язання:

1) Знайдемо значення функції в точках $x = -1$ та $x = 2$:

$f(-1) = -1 + e^{1} = e - 1$, $f(2) = 2 + e^{-2} = 2 + \frac{1}{e^2}$.

2) Знайдемо $f^{/}(x)$: $f^{/}(x) = (x + e^{-x})^{/} = 1 - e^{-x}$.

Знайдемо критичні точки: $f^{/}(x) = 0$; $1 - e^{-x} = 0$; $1 - \frac{1}{e^x} = 0$; $e^x = 1$; $x = 0$.

3) Знайдемо значення функції в точці $x = 0$: $f(0) = 0 + e^0 = 1$.

Із чисел $e - 1 \approx 1{,}72$, $2 + \frac{1}{e^2} \approx 2{,}13$ та 1 найбільшим є $2 + \frac{1}{e^2}$, а найменшим є 1.

Відповідь: $f_{\text{найб.}} = f(2) = 2 + \frac{1}{e^2}$; $f_{\text{найм.}} = f(0) = 1$.

Завдання 2. Знайдіть найменше значення функції $y = x + \frac{36}{x}$, де $x \in (0; 10)$.
Розв'язання:

Знайдемо похідну $y^{/} = 1 - \frac{36}{x^2} = \frac{x^2 - 36}{x^2}$.

Критичні точки $x_1 = 6$, $x_2 = -6$.

На інтервалі $(0; 10)$ є тільки одна критична точка $x = 6$.

При переході через цю точку похідна змінює знак з «$-$» на «$+$», і тому $x = 6$ – точка мінімуму.

Отже, $f_{\text{найм.}} = f(6) = 12$.

Відповідь: $f_{\text{найм.}} = f(6) = 12$.

Завдання 3. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 3x^2 - x^3$ на відрізку $[-1; 3]$.
Розв'язання:

Знайдемо значення функції в точках $x = -1$ та $x = 2$: $f(-1) = 4$, $f(3) = 0$.

Знайдемо $f^{/}(x)$: $f^{/}(x) = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$.

Знайдемо критичні точки: $f^{/}(x) = 0$; $3x(2 - x) = 0$; $x = 0$, $x = 2$.

Знайдемо значення функції в точці $x = 0$, $x = 2$: $f(0) = 0$, $f(2) = 4$.

Із чисел 0, 4 найбільшим є 4 , а найменшим - 0.

Відповідь: $f_{\text{найб.}} = f(2) = 4$; $f_{\text{найм.}} = f(0) = 0$.

Задача 1. Число 20 запишіть у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб добуток їхніх квадратів був найбільшим.
Розв'язання:

Нехай перший доданок дорівнює x, тоді другий доданок дорівнює $20 - x$, причому $x \in [0;\ 20]$.

Добуток квадратів цих доданків дорівнює $(20 - x)^2 \cdot x^2$. Отже, задача зводиться до знаходження такого x, при якому функція $f(x)(20 - x)^2 \cdot x^2$ набуває найбільшого значення на відрізку $[0; 20]$.

Знайдемо похідну $f^{/}(x) = 2(20 - x) \cdot (20 - x)^{/} x^2 + (20 - x)^2 \cdot 2x = -2x^2(20 - x) + (20 - x)^2 \cdot 2x = 2x(20 - x)(20 - 2x)$.

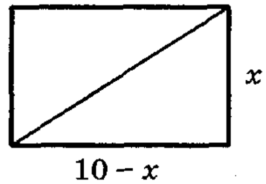
Стаціонарними точками функції є точки 0; 20; 10. Тоді

$f(0) = (20 - 0)^2 \cdot 0^2 = 0$; $f(10) = (20 - 10)^2 \cdot 10^2 = 10\,000$; $f(20) = (20 - 20)^2 \cdot 20^2 = 0$.

Отже, $f_{\text{найб.}} = f(10) = 10\,000$. Таким чином, число 20 слід подати у вигляді $20 = 10 + 10$.

Відповідь: $20 = 10 + 10$.

Задача 2. Серед прямокутників, що мають периметр 20см, знайти той, діагональ якого найменша.
Розв'язання:



Нехай довжина однієї із сторін шуканого прямокутника x см, тоді друга сторона дорівнює $10 - x$ см, де $0 < x < 10$. Тоді діагональ у прямокутника виражається формулою $y = \sqrt{(10-x)^2 + x^2} = \sqrt{100 - 20x + 2x^2}$. Знайдемо стаціонарні точки:

$y' = \frac{1}{2\sqrt{100-20x+2x^2}} \cdot (100 - 20x + 2x^2)' = \frac{4x-20}{2\sqrt{100-20x+2x^2}} = \frac{x-10}{\sqrt{100-20x+2x^2}}$;

$y' = 0$; $2x - 10 = 0$; $x = 5$.

Якщо $0 < x < 5$, то $y' < 0$, тобто функція спадає, якщо $5 < x < 10$, то $y' > 0$, і функція зростає. Отже, найменше значення функції $y = \sqrt{100 - 20x + 2x^2}$ на інтервалі $(0; 10)$ дорівнює $y_{\text{найм}} = y(5) = \sqrt{100 - 100 + 50} = 5\sqrt{2}$.

Таким чином, найменшу діагональ $5\sqrt{2}$см матиме квадрат зі стороною 5 см.

Відповідь: квадрат зі стороною 5 см.