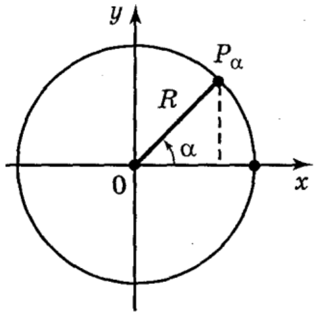
Тема:Синус, косинус, тангенс, котангенс кута. Градусне та радіанне вимірювання кутів.

Нехай дано коло радіуса R, центр якогознаходиться у початку координат. Відкладемо від додатної півосі у верхню півплощину кут α, друга сторона якого перетне коло в точці $P_\alpha(x;\ y)$.



Синусом кута називається відношення ординати точки $P_\alpha(x;\ y)$ кола до його радіуса:$\sin\alpha = \frac{y}{R}$.

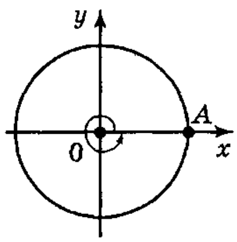
Косинусом кута називається відношення абсциси точки $P_\alpha(x;\ y)$ кола до його радіуса: $\cos\alpha = \frac{x}{R}$.

Тангенсом кута називається відношення ординати точки $P_\alpha(x;\ y)$ до її абсциси: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$.

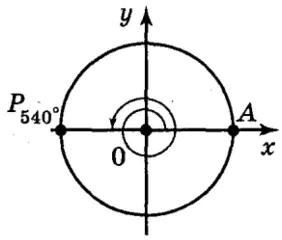
Котангенсом кута називається відношення абсциси точки $P_\alpha(x;\ y)$ до її ординати: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$.

Якщо будь-який кут розглядати як фігуру, утворену обертанням променя навколо своєї початкової точки у двох можливих напрямах (додатному–проти годинникової стрілки, від'ємному–за годинниковою стрілкою), то дане визначення можна використовувати для будь-яких кутів.

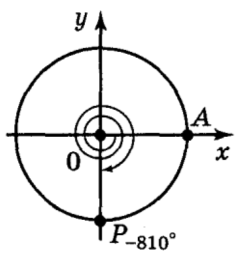
Якщо початковий радіус OA зробив повний оберт проти годинникової стрілки, то кут повороту буде дорівнювати 360^0.

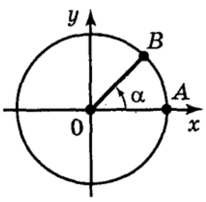


Якщо початковий радіус OA зробив півтора оберти проти годинникової стрілки, то кут повороту буде дорівнювати 540^0.



Якщо початковий радіус OA зробив два повних оберти і чверть оберту за годинниковою стрілкою, то кут повороту буде дорівнювати $2\cdot(-360^0)-90^0 = -810^0$.





Розглянемо радіуси OA і OB. Існує безліч кутів повороту, при яких початковий радіус OA переходить у радіус OB. Нехай $\angle AOB = \alpha$, тоді відповідні кути повороту будуть дорівнювати $\alpha + 360^0 n$, де n–ціле число ($n \in Z$).

Приклад 1. Записати кут β у вигляді $\beta = \alpha + 360^0 n$, де $n \in Z$, α–додатний кут, менший від 360^0, якщо $\beta = 2000^0$.

Розв'язання:

Поділимо 2000^0 на 360^0. Отже, даний кут складається з 5 повних обертів і ще 200^0. Тому $\beta = 2000^0 = 200^0 + 360^0 \cdot 5, n = 5, \alpha = 200^0$.

Якщо початковий радіус переходить у радіус OB при повороті на кут α, то в залежності від того, у якій чверті буде радіус OB, кут α називають кутом цієї чверті. Так, якщо $0^0 < \alpha < 90^0$, то α–кут I чверті; якщо$90^0 < \alpha < 180^0$, то α–кутIIчверті; якщо $180^0 < \alpha < 270^0$, то α–кут IIIчверті; якщо $270^0 < \alpha < 360^0$, то α–кут IV чверті.

Приклад 2. Кутом якої чверті є кут α, якщо:

1) $\alpha = 83^0$; 2) $\alpha = 450^0$; 3) $\alpha = -40^0$; 4) $\alpha = -115^0$. Розв'язати самостійно.

Кожному допустимому значенню α відповідає єдине значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, тому синус, косинус, тангенс, котангенс є функціями кута α. Їх називають *тригонометричними функціями.*

Як відомо, кути вимірюються в градусах, хвилинах, секундах.

*Градусом*називається$\frac{1}{180}$ частина розгорнутого кута.

$$1^0 = 60', \ 1' = 60'', \ 1' = \frac{1}{60}^{\,0}, \ 1'' = \frac{1}{30}^{\,\prime}.$$

Крім градусної міри, використовуються й інші одиниці вимірювання кутів. Це радіанна міра кута.

*Радіанною мірою кута*називається відношення довжини відповідної дуги до радіуса кола.

Одиницею радіанної міри кутів є радіан.

1 радіан– центральний кут, який опирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу.

$$1 \text{ рад} \approx 57^0, \quad 1^0 \approx 0{,}017\text{рад}.$$

Формули переходу від градусної міри кута до радіанної і навпаки

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi\alpha^0}{180^0}} \quad \text{і} \quad \boxed{\alpha^0 = \frac{\alpha^0 \cdot 180^0}{\pi}}.$$

Приклад 3. Виразіть в радіанах величини кутів 60°; 150°.

розв'язання:

1) $60^0 = \frac{\pi \cdot 60^0}{180^0} = \frac{\pi}{3}$; 2) $150^0 = \frac{\pi \cdot 150^0}{180^0} = \frac{5\pi}{6}$

Приклад 4. Виразіть в градусах величини кутів$\frac{\pi}{6}$; 4,5 рад.

розв'язання:

1) $\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{\pi}{6} \cdot 180^0}{\pi} = 30^0$; 2) $4{,}5 = \frac{4{,}5 \cdot 180^0}{\pi} \approx 258^0$.

При записі радіанної міри кута позначення "рад" опускають. Наприклад, замість рівності $90^0 = \frac{\pi}{2}$ рад, пишуть $90^0 = \frac{\pi}{2}$.

значення тригонометричних функцій

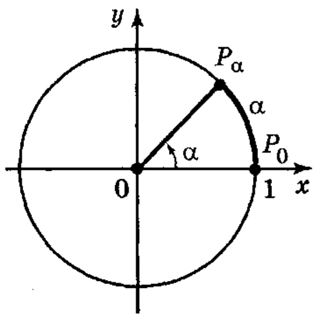
α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Тема. Тригонометричні функції числового аргументу. Знаки значень тригонометричних функцій, їх парність та непарність.

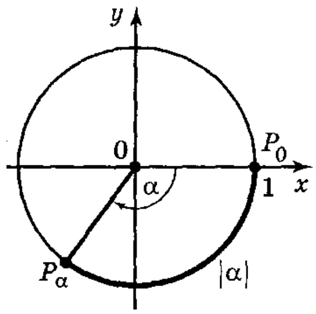
1. Тригонометричні функції числового аргументу

Розглянемо на координатній площині коло радіуса 1 з центром у початку координат, яке називається **одиничним**. Позначимо точку P_0–правий кінець горизонтального діаметра. Поставимо у відповідність кожному дійсному числу α точку кола за такими правилами:

1) Якщо $\alpha > 0$, то, рухаючись по колу із точки P_0 в напрямі проти годинникової стрілки (додатний напрям обходу кола), опишемо по колу шлях довжиною α, кінцева точка цього шляху і буде шуканою точкою P_α.



2) Якщо $\alpha < 0$, то, рухаючись по колу із точки P_0 в напрямі за годинниковою стрілкою, опишемо по колу шлях довжиною α , кінець цього шляху і буде шукана точка P_α.



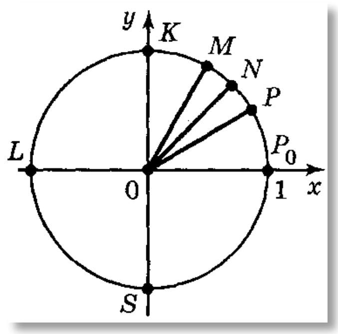
3) Якщо $\alpha = 0$, то поставимо у відповідність точку P_0.

Якщо $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$, де k–ціле число, то при повороті на кут α одержуємо одну і ту саму точку, що й при повороті на кут α_0.

Якщо точка P відповідає числу α, то вона відповідає і всім числам виду $\alpha + 2\pi k$, де 2π–довжина кола (бо радіус дорівнює 1), а k–ціле число, що показує кількість повних обходів кола в ту чи іншу сторону.

приклад 1

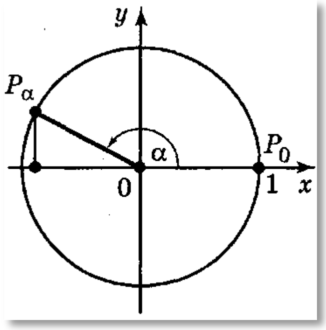
Яким числам відповідають точки P_0, P, M, K, L, S, якщо відомо, що N–середина дуги P_0K, а дуги P_0P, PM, MK–рівні.



відповіді:

$2\pi n$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $\pi + 2\pi n$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $\pi \epsilon Z$

Синусом числа α називається ордината точки P_α, утвореної поворотом точки $P_0(1; 0)$ навколо початку координат на кут в α радіан (позначається $\sin \alpha$). Синус визначений для будь-якого числа α.



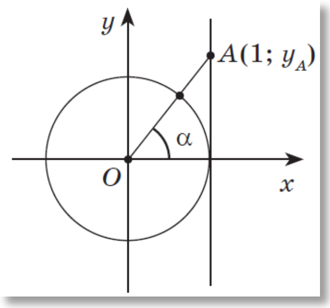
Косинусом числа α називається абсциса точки P_α, утвореної поворотом точки $P_0(1;0)$ навколо початку координат на кут в α радіан (позначається $\cos\alpha$). Косинус визначений для будь-якого числа α.

Тангенсом числа α називається відношення синуса числа α до його косинуса:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Тангенс визначений для всіх α, крім тих значень, для яких $\cos\alpha = 0$, тобто, $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon Z$.

Лінією тангенсів називають дотичну до одиничного тригонометричного кола в точці $(1;0)$.



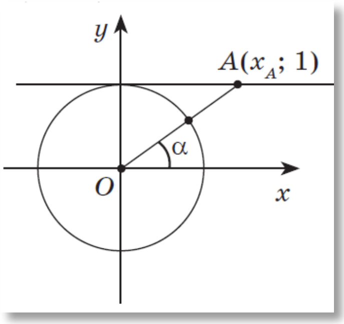
Отже, можна сказати, що *тангенс числа* α — це ордината відповідної точки на лінії тангенсів.

Котангенсом числа α називається відношення косинуса числа α до його синуса:

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Котангенс визначений для всіх α, крім тих значень, для яких $\sin\alpha = 0$, тобто,$\alpha = \pi n, n\epsilon Z$.

Лінією котангенсів називають дотичну до одиничного тригонометричного кола в точці$(0;1)$.

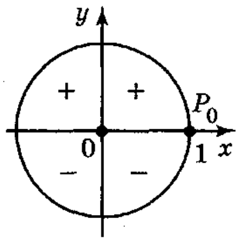


Котангенс числа α — це абсциса відповідної точки на лінії котангенсів.

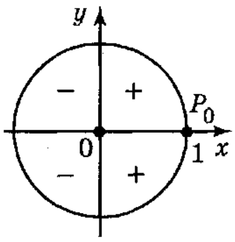
2. Вивчення зміни знаків тригонометричних функцій

знаки тригонометричних функцій в залежності від кута

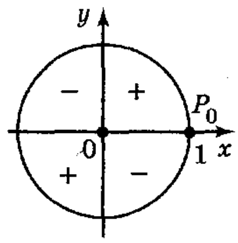
Знаки $\sin\alpha$



Знаки $\cos\alpha$



Знаки $\mathrm{tg}\,\alpha, \mathrm{ctg}\alpha$



3. Парність (непарність) тригонометричних функцій

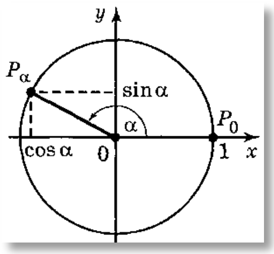
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ – функція парна;
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ – функція непарна;
$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$ – функція непарна;
$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$ – функція непарна.

Тема. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу.

<u>Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу</u>

співвідношення між синусом і косинусом

Нехай точка $P_\alpha(x;\ y)$ одиничного кола отримана поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ на кут α радіан, тоді згідно з означенням синуса і косинуса: $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$.



Оскільки точка $P_\alpha(x;\ y)$ належить одиничному колу, то координати точки $(x;\ y)$ задовольняють рівнянню $x^2 + y^2 = 1$ підставивши в це рівняння замість x і y значення $\cos\alpha$, і $\sin\alpha$, отримаємо:$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$ або $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Таким чином,

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

для всіх значень α. Ця рівність називається **основною тригонометричною тотожністю**.

З основної тригонометричної тотожності можна виразити $\sin\alpha$ через $\cos\alpha$ і навпаки.

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha};$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}.$$

співвідношення між тангенсом і котангенсом

Згідно з визначенням тангенса і котангенса,$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Перемноживши ці рівності, одержимо$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$.

Отже,

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1}$$

для всіх значень α, крім$\alpha = \frac{\pi}{2}k, k\epsilon Z$. Із одержаної рівності можна виразити $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{ctg}\alpha$ і навпаки:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha};\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

співвідношення між тангенсом і косинусом, котангенсом і синусом

Розділимо ліву і праву частину рівності $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на $\cos^2\alpha$, вважаючи, що $\cos\alpha \neq 0$, одержимо:

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$
$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

звідси:

$$\boxed{\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}},\text{ де } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z.$$

Розділимо ліву і праву частину рівності $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на $\sin^2\alpha$, вважаючи, що $\sin\alpha \neq 0$, одержимо:

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$
$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$

звідси:

$$\boxed{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}},\text{ де}\alpha \neq \pi k, k\epsilon Z.$$

Тема. Формули зведення. Періодичність функцій.

формули зведення

Тригонометричні функції чисел виду $\frac{\pi}{2} \pm \alpha,\ \pi \pm \alpha,\ \frac{3\pi}{2} \pm \alpha,\ 2\pi \pm \alpha$ можуть бути виражені через функції кута α за допомогою формул, які називаються *формулами зведення*.

Користуючись формулами тригонометричних функцій суми (різниці) двох чисел, можна довести формули зведення:

для синуса

$$\sin\ \frac{\pi}{2} + \alpha\ \ = \cos\alpha,\ \ \sin\ \frac{\pi}{2} - \alpha\ \ = \cos\alpha;$$
$$\sin\ \pi + \alpha\ \ = -\sin\alpha,\ \ \sin\ \pi - \alpha\ \ = \sin\alpha;$$
$$\sin\ \frac{3\pi}{2} + \alpha\ \ = -\cos\alpha,\ \ \sin\ \frac{3\pi}{2} - \alpha\ \ = -\cos\alpha.$$

для косинуса

$$\cos\ \frac{\pi}{2} + \alpha\ \ = -\sin\alpha,\ \ \cos\ \frac{\pi}{2} - \alpha\ \ = \sin\alpha;$$
$$\cos\ \pi + \alpha\ \ = -\cos\alpha,\ \ \cos\ \pi - \alpha\ \ = -\cos\alpha;$$
$$\cos\ \frac{3\pi}{2} + \alpha\ \ = \sin\alpha,\ \ \cos\ \frac{3\pi}{2} - \alpha\ \ = -\sin\alpha.$$

для тангенса і котангенса

$$\operatorname{tg}\ \frac{\pi}{2} + \alpha\ \ = -\operatorname{ctg}\alpha,\ \ \operatorname{tg}\ \frac{\pi}{2} - \alpha\ \ = \operatorname{ctg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}\ \frac{\pi}{2} + \alpha\ \ = -\operatorname{tg}\alpha,\ \ \operatorname{ctg}\ \frac{\pi}{2} - \alpha\ \ = \operatorname{tg}\alpha.$$

правила, за якими можна записати будь-яку з формул зведення

1. Перед зведеною функцією ставиться той знак, який має початкова функція в даній чверті.

2. Функція змінюється на «кофункцію», якщо кут дорівнює $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$; функція не змінюється, якщо кут дорівнює $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$.

Приклад 1. Виразимо $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$ через тригонометричну функцію кута α.

Розв'язання:

Якщо вважати, що кут α–кут I чверті, то $\pi - \alpha$ буде кутом II чверті. У II чверті тангенс від'ємний, отже, у правій частині рівності слід поставити знак "мінус". Для кута $\pi - \alpha$ назва функції "тангенс" зберігається. Тому $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Приклад 2. Знайдемо значення $\sin\frac{8\pi}{3}$.

Розв'язання:

Маємо: $\sin\frac{8\pi}{3} = \sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Приклад 3. Знайдемо значення $\cos 135^0$.

Розв'язання:

Маємо: $\cos 135^0 = \cos(90^0 + 45^0) = -\sin 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

періодичність функцій

У природі часто зустрічаються явища, які повторюються періодично. Наприклад, Земля, обертаючись навколо Сонця, періодично повертається у своє початкове положення через рік, два роки, три роки й т. д. Тому говорять, що період обертання Землі навколо Сонця дорівнює одному року. У техніці періодичний характер має рух колінчастого вала, маховика, у фізиці — звукові, електромагнітні явища, у біології — робота серця людини. Закономірності періодичних явищ описуються періодичними функціями, про які й піде зараз мова.

формування поняття періодичної функції, періоду функції

Функція $y = f(x)$ називається *періодичною* з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого x з області визначення числа $x + T$ і $x - T$ також належать області визначення і виконується рівність $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$.

Так як у тій самій точці P_α одиничного кола відповідає нескінчена множина чисел $\alpha + 2\pi k$, де $k \in Z$, то

$$\boxed{\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha, \quad \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha}$$

Звідси випливає, що $2\pi k$–періоди функцій синус і косинус ($k \neq 0$).

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{ctg}\alpha}$$

Звідси випливає, що πk–періоди функцій тангенс і котангенс ($k \neq 0$).

Прийнято говорити, що період тангенса і котангенса дорівнює π. А період косинуса і синуса дорівнює 2π.

справедливе твердження

Якщо функція $y = f(x)$ періодична і має період T, то функція $y = Af(kx + b)$, де A, k, b– постійні ($k \neq 0$), також періодична, причому її період дорівнює $T_0 = \frac{T}{|k|}$.

Приклад 4. Знайти найменший додатній період функцій:

а) $y = \operatorname{tg} 3x$ б) $y = \cos\frac{x}{5}$; в) $y = \cos\frac{x}{5} + \operatorname{tg} 3x$.

Розв'язання:

а) Оскільки $T_0 = \frac{T}{|k|}$, то $T_0 = \frac{\pi}{3}$;

б) у даному випадку $k = \frac{1}{5}$, тому $T = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{5}} = 10\pi$;

в) оскільки період функції $y = \cos\frac{x}{5}$ дорівнює 10π, а період функції $y = \operatorname{tg} 3x$ дорівнює $\frac{\pi}{3}$, то періодом функції $y = \cos\frac{x}{5} + \operatorname{tg} 3x$ є найменше спільне кратне періодів 10π і $\frac{\pi}{3}$, тобто число 10π.

Тема. Графіки тригонометричних функцій та їх властивості.

Побудова графіка функції $y=\sin x$

У силу періодичності функції $y=\sin x$ її графік достатньо побудувати на відрізку $[0;\ 2\pi]$ і продовжити його за допомогою паралельного перенесення побудованої частини на 2π, 4π, 6π і т. д. праворуч і ліворуч. При побудові скористаємося тим, що синус числа α–це ордината точки одиничного кола, в яку переходить точка $A[1;0]$ при повороті навколо початку координат на α радіан.

Отриманий графік називають *синусоїдою*(рис. 1).

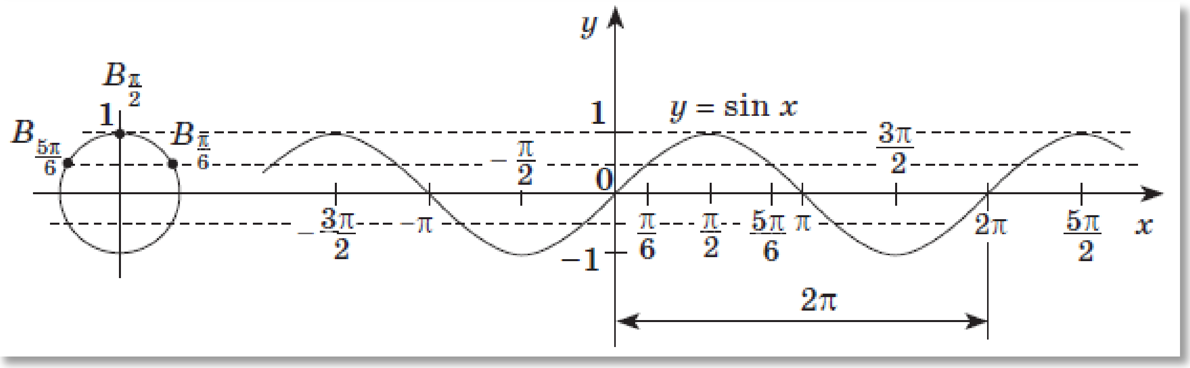


Рис. 1

зауваження

Тригонометричні функції широко застосовуються в математиці, фізиці й техніці. Наприклад, безліч процесів, таких як коливання струни, маятника, напруга в колі змінного струму тощо, описуються функцією, яка задається формулою $y = A\sin\ \omega x+\varphi$. Такі процеси називають гармонічними коливаннями.

Графік функції $y=A\sin\ \omega x+\varphi$ можна одержати із синусоїди $y=\sin x$ стисненням або розтягненням її вздовж координатних осей і паралельним перенесенням уздовж осі Оx. Найчастіше гармонічне коливання є функцією часу t. Тоді воно задається формулою

$y=A\sin\ \omega x+\varphi$, де A— амплітуда коливання, ω — частота,φ — початкова фаза,$\frac{2\pi}{\omega}$ – період коливань.

Аналогічно одержуємо графік функції $y=\cos x$— *косинусоїди* (рис. 2), а також графіки функцій $y=\ \mathrm{tg}\, x$— *тангенсоїди* (рис. 3) і $y=\ \mathrm{ctg}\, x$— *котангенсоїди* (рис. 4), враховуючи, що останні дві функції визначені при $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,$ де $k\epsilon Z$, і$x\neq\pi n,$ де $n\epsilon Z$, відповідно.

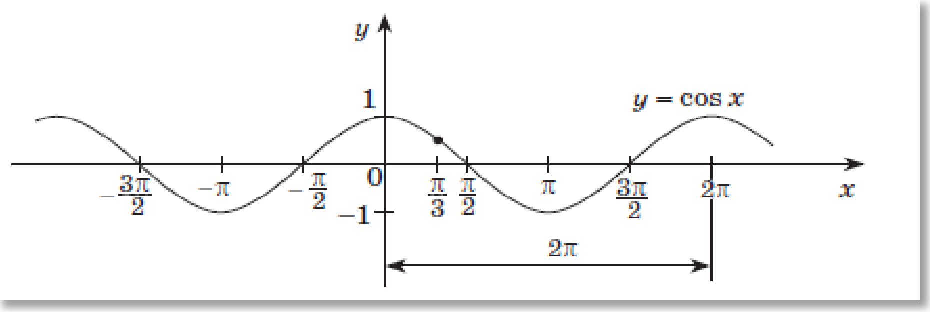


Рис. 2

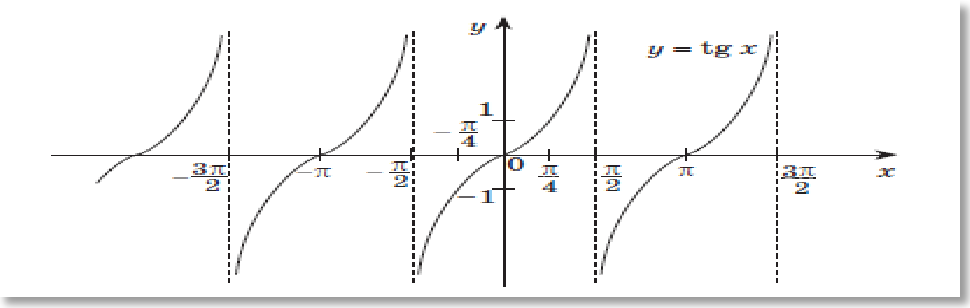


Рис. 3

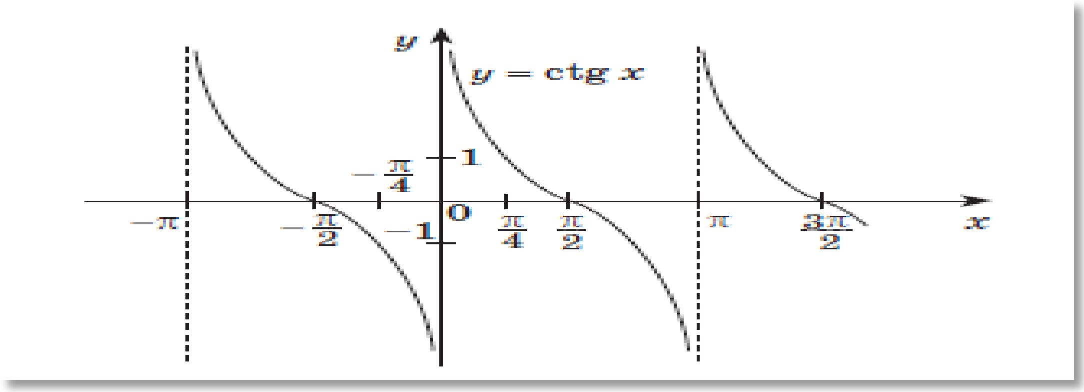


Рис. 4

Властивості тригонометричних функцій

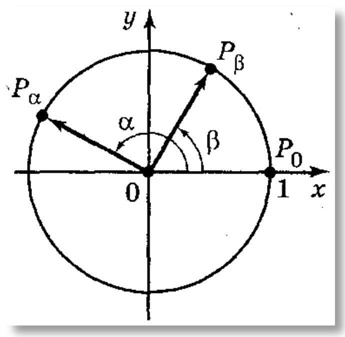
Функція / **Властивість**	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
1. Область визначення	$x \in R$	$x \in R$	$x \in R$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	$\boldsymbol{x \in R}$, $\boldsymbol{x \neq \pi n, n \in Z}$
2. Множина значень	$y \in [-1; 1]$	$y \in [-1; 1]$	$y \in R$	$\boldsymbol{y \in R}$
3.Парність (непарність)	Непарна	Парна	Непарна	**Непарна**
4. Періодичність	$T = 2\pi n, n \in Z$	$T = 2\pi n, n \in Z$	$T = \pi n, n \in Z$	$\boldsymbol{T = \pi n, n \in Z}$
5. Набуває нульових значень	$x = \pi n, n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} n, n \in Z$	$x = \pi n, n \in Z$	$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} n, n \in Z}$

6. Проміжки зростання	$x\epsilon\ -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\ +2\pi n, n\epsilon Z$	$x\epsilon\ -\pi+2\pi n; 2\pi n\ , n\epsilon Z$	$x\epsilon\ -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2} +\pi n, n\epsilon Z$	**Не має**
7. Проміжки спадання	$x\epsilon\ \frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\ +2\pi n, n\epsilon Z$	$x\epsilon\ 2\pi n; \pi+2\pi n\ , n\epsilon Z$	Не має	$\boldsymbol{x\epsilon\ \pi n, \pi+\pi n\ , n\epsilon Z}$
8. Набуває додатних значень	$y\epsilon(2\pi n; \pi+2\pi n), n\epsilon Z$	$y\epsilon\ -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\ +2\pi n, n\epsilon Z$	$y\epsilon\ \pi n;\frac{\pi}{2} +\pi n\ , n\epsilon Z$	$\boldsymbol{y\epsilon\ \pi n;\frac{\pi}{2} +\pi n\ , n\epsilon Z}$
9. Набуває від'ємних значень	$y\epsilon\ \pi; 2\pi\ +2\pi n, n\epsilon Z$	$y\epsilon\ \frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\ +2\pi n, n\epsilon Z$	$y\epsilon\ -\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi n\ , n\epsilon Z$	$\boldsymbol{y\epsilon\ \frac{\pi}{2};\pi +\pi n, n\epsilon Z}$
10. Найбільше значення	$y=1$ при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\epsilon Z$	$y=1$ при $x=2\pi n, n\epsilon Z$	Не має	**Не має**
11. Найменше значення	$\boldsymbol{y=-1}$ **при** $\boldsymbol{x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n, n\epsilon Z}$	$\boldsymbol{y=-1}$ **при** $\boldsymbol{x=\pi+2\pi n, n\epsilon Z}$	**Не має**	**Не має**

Тема. Тригонометричні функції додавання та наслідки з них.

Формули суми і різниці двох чисел

Розглянемо, як пов'язані косинус різниці двох чисел із синусом і косинусом цих самих чисел.



На одиничному колі позначимо точки P_α і P_β $(\alpha > \beta)$, проведемо вектори OP_α і OP_β, тоді $OP_\alpha(\cos\alpha\,;\ \sin\alpha)$,$OP_\beta(\cos\beta\,;\ \sin\beta)$. Знайдемо скалярний добуток векторів OP_α і OP_β двома способами:

1) $OP_\alpha \cdot OP_\beta = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta;$

2) $OP_\alpha \cdot OP_\beta = \ OP_\alpha\ \cdot\ OP_\beta\ \cos\ \alpha-\beta\ = 1\cdot\cos\ \alpha-\beta\ = \cos\ \alpha-\beta\ .$

Звідси маємо:тригонометричні функції суми і різниці двох чисел

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$ **(1)**

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$ **(2)**

$\sin\ \alpha+\beta\ = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$ **(3)**

$\sin\ \alpha-\beta\ = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$ **(4)**

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}; \qquad \textbf{(5)}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}. \qquad \textbf{(6)}$$

Приклад 1. Знайти значення виразу: $\frac{\mathrm{tg}\,13^0+\mathrm{tg}\,47^0}{1-\mathrm{tg}\,13^0\,\mathrm{tg}\,47^0}$.

Розв’язання:

$$\frac{\mathrm{tg}\,13^0+\mathrm{tg}\,47^0}{1-\mathrm{tg}\,13^0\,\mathrm{tg}\,47^0} = \mathrm{tg}\,(13^0+47^0) = \mathrm{tg}\,60^0 = \sqrt{3}.$$

тригонометричних функцій подвійного та половинного аргументу

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}}$$

Приклад 2. Обчислити $(\cos 75^0 - \sin 75^0)^2$.

Розв’язання:

$$(\cos 75^0 - \sin 75^0)^2 = \cos^2 75^0 - 2\sin 75^0\cos 75^0 + \sin^2 75^0 = (\cos^2 75^0 + \sin^2 75^0) -$$
$$-\sin 2\cdot 75^0 = 1 - \sin 150^0 = 1 - \sin 30^0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

основна тригонометрична тотожність для кута $\frac{\alpha}{2}$

$$1 = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

формула подвійного кута для $\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

$$\boxed{1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \qquad 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

формули перетворення суми у добуток

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \qquad \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}; \qquad \sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2};$$

$$\mathrm{tg}\,x \pm \mathrm{tg}\,y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}.$$

формули перетворення добутку у суму

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right) \qquad \sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)$$

Приклад 3. Обчислити $\cos 22^0 - \cos 38^0$.
Розв'язання:
$\cos 22^0 - \cos 38^0 = -2\sin\frac{60^0}{2}\sin\frac{-16^0}{2} = 2\sin 30^0 \sin 8^0 = \sin 8^0$.

Тема. Обернені тригонометричні функції.

1. Функція обернена до функції $y = \sin x$.

Із властивості періодичності функції випливає, що кожного свого значення функція набуває для нескінченної множини значень аргументу, тому функція $y = \sin x$ не є оборотною на всій області визначення. Виберемо проміжок монотонності, найближчій до 0. Це проміжок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, де синус набуває всіх своїх значень $y \in [-1;1]$ і зростає.

Із рівняння $y = \sin x$ знайдемо кут синус якого дорівнює y. Це можна записати так:

$$x = \arcsin y.$$

Поміняємо місцями позначення залежної і незалежної змінних. Дістанемо: $y = \arcsin x$, де x – значення синуса і $x \in [-1;1]$, y – кут (число), синус якого дорівнює x, $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ або

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}.$$

Арксинусом числа $a \in [-1;1]$ називається таке число α, що $\sin\alpha = a$ і $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

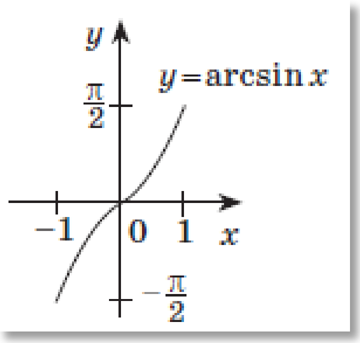
Приклад 1. Обчислити $\arcsin\frac{1}{2}$

Розв'язання:

Нехай $\arcsin\frac{1}{2} = \alpha$. 1) $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, 2) $\sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$.

властивості функції $y = \arcsin x$.

1) $D(y) = [-1;\ 1]$;
2) $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;
3) функція зростаюча;
4) при $x = 0, y = 0$;
5) найбільшого значення функція набуває при $x = 1$, і воно дорівнює $\frac{\pi}{2}$, найменшого – при $x = -1$, і воно дорівнює $\frac{-\pi}{2}$;
6) функція є непарною: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;
7) графік функції $y = \arcsin x$ одержимо за допомогою перетворення симетрії графіка функції $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, відносно прямої $y = x$(рис. 1).



2. Функція обернена до функції $y = \cos x$.

Вводиться аналогічно попереднього прикладу.

Арккосинусом числа $a \in [-1;\ 1]$ називається таке число α, що $\cos\alpha = a$ і $0 \le \alpha \le \pi$.

Приклад 2. Обчислити $\arccos\frac{\overline{3}}{2} = \alpha$.

Розв'язання:

1) $\alpha \in\ \ 0;\pi\ $, 2) $\cos\alpha = \frac{\overline{3}}{2}$ $=> \alpha = \frac{\pi}{6}$.

властивості функції $y = \arccos x$.

1) $D\ \ y\ \ = [-1;\ 1]$;
2) $E(y) =\ \ 0;\pi\ $;
3) функція спадна;
4) при $x = 1, y = 0$;
5) найбільшого значення функція набуває при $x = -1$, і воно дорівнює π, найменшого – при $x = 1$, і воно дорівнює 0;
6) функція ні парна, ні непарна: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;

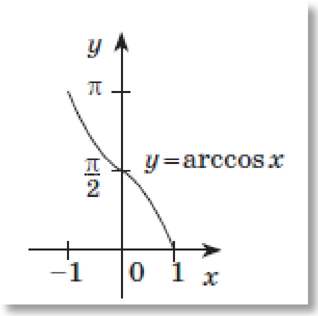


Рис. 2

3. Функція обернена до функції $y = \mathrm{tg}\, x$.

Функція тангенс не є оборотною на всій області визначення для нескінченної множини значень аргументу.

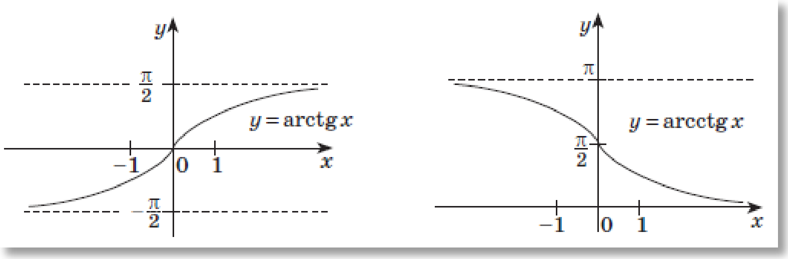
Виберемо проміжок, де функція монотонна, наприклад проміжок $-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}$, на якому функція $y = \mathrm{tg}\, x$ зростає. Тоді $y = \mathrm{arctg}\, x$– обернена функція, де $x \epsilon (-\infty; +\infty)$; $y \epsilon\ \ -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}$, або

$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{arctg}\, x < \frac{\pi}{2}$.

Студенти самостійно описують властивості функції $y = \mathrm{arctg}\, x$ та коментують їх.

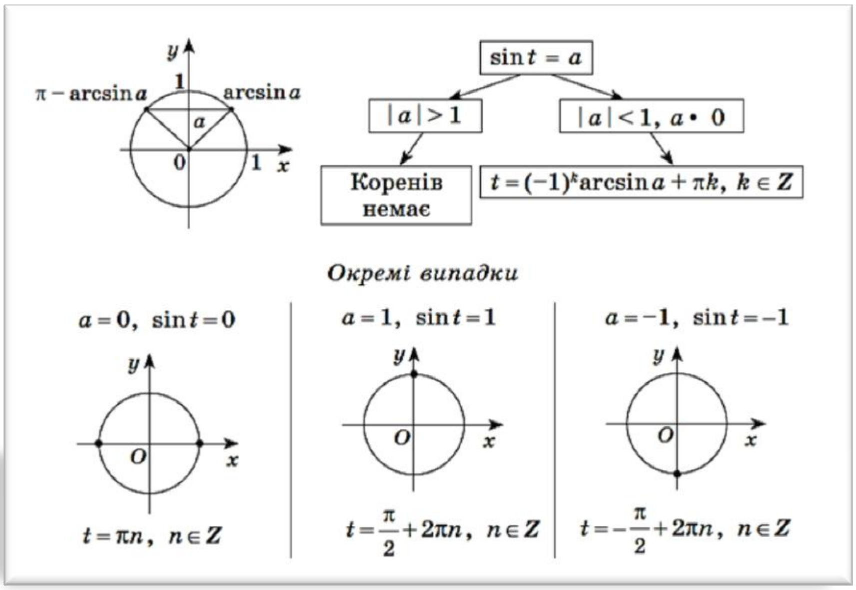
4. Функція обернена до функції $y = \mathrm{ctg}\, x$.

Студенти самостійно описують властивості функції $y = \operatorname{arctg} x$ та коментують їх.



Тема: Найпростіші тригонометричні рівняння.

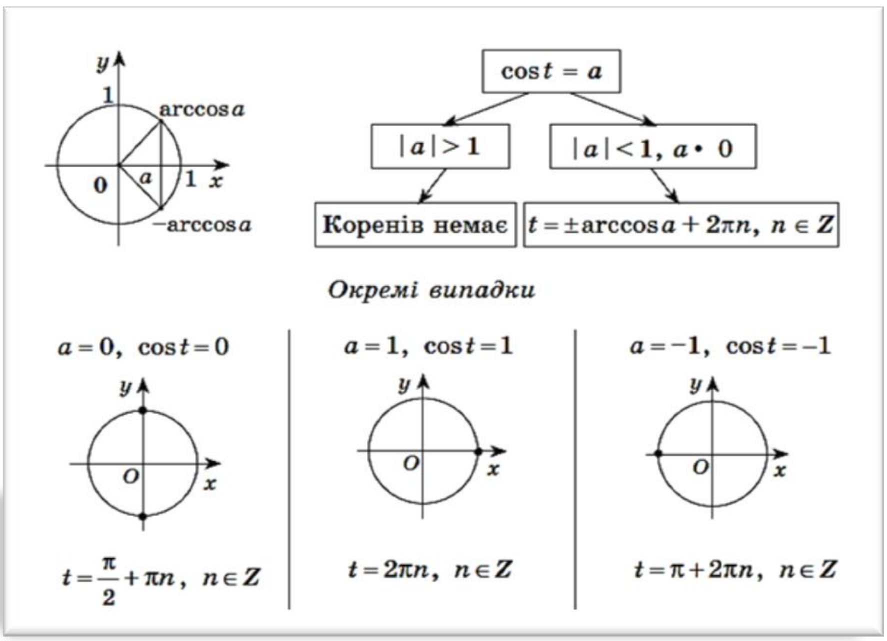
Рівняння $\sin t = a$



1) $\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \left(-1\right)^{n+1} \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \pi n = \left(-1\right)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \epsilon Z;$

2) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \pi n \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \epsilon Z.$

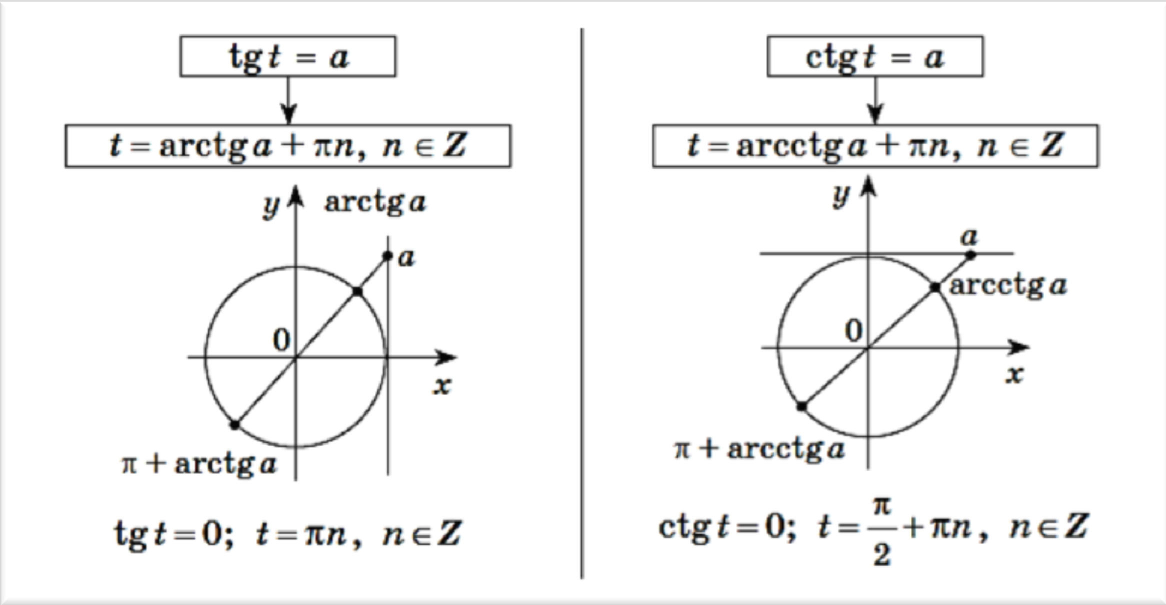
Рівняння $\cos t = a$



3) $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon Z;$

4) $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \pm \frac{\pi}{2} + 4\pi n, n\epsilon Z \Rightarrow x_1 = \frac{7\pi}{6} + 4\pi n;\ \ x_2 = \frac{\pi}{6} + 4\pi n, n\epsilon Z.$

***Рівняння* $\mathbf{tg}\, t = a$ *Рівняння* $\mathbf{ctg}\, t = a$**



5) $\operatorname{tg} 2x = -1 \Rightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \Rightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n\epsilon Z.$

6) $\operatorname{ctg} 3x = \sqrt{3} \Rightarrow 3x = \operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \pi n \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n\epsilon Z.$