Логарифм числа і його властивості

Логарифмом додатного числа b з основою a ($a > 0, a \neq 1$) називають показник степеня, до якого треба піднести основу a, щоб дістати число b.

$$\log_a b = x, \quad a^x = b.$$

$\log_2 32 = 5, \ \ 2^5 = 32.$

$\boldsymbol{a^{\log_a b} = b}$ -основна логарифмічна тотожність

Властивості логарифмів

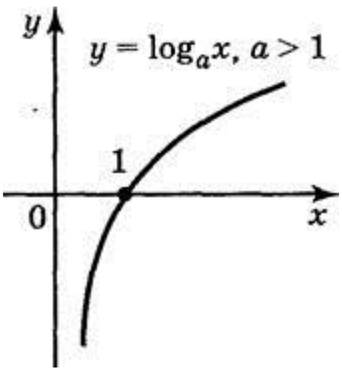
1. $\log_a a = 1$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$
4. $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$
5. $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$
6. $\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \cdot \log_a x$
7. $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$
8. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

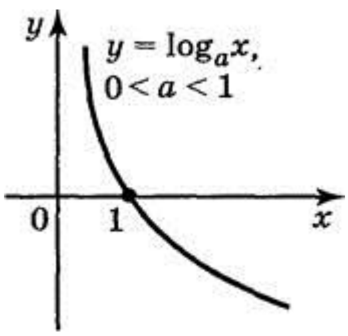
$log_{10}x = lgx$ -логарифм десятковий , $log_e x = lnx$-логарифм натуральний

Логарифмічна функція

Функція виду $y = \log_a x$ **називається логарифмічною , де а- задане число, а**> 0 **, а**$\neq 1$.

Вона є оберненою до показникової.





Властивості логарифмічної функції

1. Область визначення функції $D(y)=(0;+\infty)$;
2. Область значень функції $E(y)=(-\infty;+\infty)$;
3. Якщо **a>1**, тоді функція зростає на всій області визначення;
4. Якщо **0<a<1**, тоді функція спадає на всій області визначення;
5. Проходить через точку **(1;0)**;
6. Немає ні найбільшого ні найменшого значення.

Логарифмічні рівняння

Рівняння виду $\log_a x = b$, де a>0, a≠1 називають найпростішим логарифмічним рівнянням.

Корінь рівняння можна знайти, використовуючи формулу $x = a^b$.

Приклад 1. $\log_3(3x-1) = 2$,

$3x - 1 = 3^2$,

$3x - 1 = 9$,

$3x = 10$,

$x = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$. Відповідь: $x= 3\frac{1}{3}$.

Нехай **a>0, a≠1**. Якщо $\mathbf{log}_a x_1 = \mathbf{log}_a x_2$, тоді $x_1=x_2$.

Приклад 2. $\log_6(4x+1) = 2\log_6 5$

Знайдемо ОДЗ: $4x+1>0$,

$x> -\frac{1}{4}$.

$\log_6(4x+1) = \log_6 5^2$,

$4x+1=25$,

$4x=24$,

$x=6$. Враховуючи ОДЗ, $x=6$. Відповідь: $x=6$.

Приклад 3. $\log_3(2x-1) + \log_3(x-2) = 3$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x-1>0, \\ x-2>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>\frac{1}{2}, \\ x>2; \end{cases} \Rightarrow x>2.$

$\log_3((2x-1)\cdot(x-2) = 3$,

$(2x-1)\cdot(x-2)=3^2$,

$2x^2-5x-25=0$, $x_1=5$, $x_2=-\frac{5}{2}$ не входить в ОДЗ. Відповідь: x=5.

Приклад 4. $\log^2_3 x+\log_3 x-12=0$

ОДЗ: x>0. Нехай $\log_3 x=t$, тоді $t^2+t-12=0$,

$\left[\begin{array}{l} t_1 = 3, \\ t_2 = -4; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \log_3 x = 3, \\ \log_3 x = -4; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 3^3, \\ x = 3^{-4}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 27, \\ x = \frac{1}{81}. \end{array}\right.$ Відповідь: x=27, $x=\frac{1}{81}$.

Приклад 5. $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = \frac{5}{2}$. Нехай $\log_2 x = t$, тоді $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$.

Звідси $\begin{cases} 2t^2 - 5t + 2 = 0, \\ t \neq 0. \end{cases}$ Отже, $\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{1}{2}, \\ t_2 = 2. \end{array}\right.$ Тоді початкове рівняння рівносильне сукупності рівнянь $\left[\begin{array}{l} \log_2 x = \frac{1}{2}, \\ \log_2 x = 2. \end{array}\right.$ Звідси $\left[\begin{array}{l} x = 2^{\frac{1}{2}}, \\ x = 2^2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2}, \\ x = 4. \end{array}\right.$ Відповідь: $x=\sqrt{2}$, x=4.

Приклад 5. $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$ $\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = \frac{5}{2}$

Нехай $\log_2 x = a$, тоді $a + \frac{1}{a} = \frac{5}{2}$. Звідси $\begin{cases} 2a^2 - 5a + 2 = 0, \\ a \neq 0. \end{cases}$ Отже, $\left[\begin{array}{l} a = \frac{1}{2}, \\ a = 2. \end{array}\right.$

Тоді початкове рівняння рівносильне сукупності $\left[\begin{array}{l} \log_2 x = \frac{1}{2}, \\ \log_2 x = 2; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2^{\frac{1}{2}}, \\ x = 2^2; \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2}, \\ x = 4. \end{array}\right.$ Відповідь: $\sqrt{2}$, 4.

Приклад 6. $x^{\log_5 x} = 5$.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$ Прологарифмуємо обидві частини рівняння з основою 5.

$\log_5 x^{\log_5 x} = \log_5 5$. За основною логарифмічною тотожністю одержимо
$\log_5 x \cdot \log_5 x = \log_5 5 \Rightarrow$ $\log^2_5 x=1$.

$\left[\begin{array}{l}\log_5 x = 1, \\ \log_5 x = -1;\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = \frac{1}{5}.\end{array}\right.$ Відповідь: $5, \frac{1}{5}$.

Логарифмічні нерівності.

При розв'язуванні логарифмічних нерівностей використовують властивість монотонності функції $\boldsymbol{\log}_a x > \boldsymbol{\log}_a y$.

Якщо a>1, тоді x>y. Якщо 0<a<1, тоді x<y.

Приклад 1. $\log_2 x > 3$.

ОДЗ: x>0. Дана функція зростаюча, так як a>1. За означенням логарифмічної функції $x > 2^3$, x>8. Враховуючи ОДЗ , x∈ (8;∞).

Цю нерівність можна розв'язати і іншим способом:

$\log_2 x > 3\log_2 2 \Rightarrow \log_2 x > \log_2 2^3$. Так як функція $\log_2 x$ ↑, тоді $x > 8$.

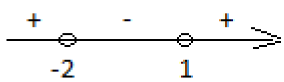
Приклад 2. $\log_{0,3} x \geq 1$.

ОДЗ: x>0. $\log_{0,3} x \geq \log_{0,3} 0{,}3$. Так як функція ↓, тоді $x \leq 0{,}3$.

Враховуючи ОДЗ, x∈ $(0; 0{,}3]$.

Приклад 3. $\lg^2 x + \lg x > 2$.

ОДЗ: x>0. Нехай lg x=t. Тоді $t^2 + t > 2$. Розв'яжемо квадратичну нерівність методом інтервалів: (t+2)·(t-1)>0.



$\left[\begin{array}{l} t > 1, \\ t < -2;\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} lg\, x > 1, \\ lg\, x < -2;\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > 10, \\ x < 0{,}01.\end{array}\right.$

Враховуючи ОДЗ, x ∈ (0;0,01) ∪ $(10; +\infty)$.

Виконати завдання.

1.Знайдіть логарифм з основою 2 числа: а) 1; б) 2; в) 32; г) $\sqrt{2}$; д) 0,5;

е) $\frac{1}{8}$; є) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; ж) $2\sqrt{2}$.

2. Знайдіть логарифм з основою 3 числа:

а) 3; б) $\frac{1}{3}$; в) 1; г) 81; д) $\frac{1}{9}$; е) $\frac{1}{243}$; є) $\sqrt{3}$; ж) $3\sqrt{3}$.

3. Знайдіть логарифм з основою $\frac{1}{3}$ числа:

а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{1}{27}$; в) 3; г) 81; д) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; е) $\sqrt[3]{3}$.

4. Обчисліть:

а) $2^{\log_2 32}$; б) $7^{2\log_7 2}$; в) 10^{2+lg8}; г) $3^{\log_3 8-2}$; д) $(\frac{1}{5})^{\log_{25} 9+2}$.

5. Обчисліть:

а) lg8+lg12.5; б) $\log_3 162 - \log_3 2$; в)$\log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56$;

г) $\frac{\log_5 64}{\log_5 4}$; д) $\frac{\log_7 27 - 2\log_7 3}{\log_7 45 + \log_7 0.2}$; е) $3\log_6 2 + \frac{3}{4}\log_6 81$.

6. Обчисліть:

а) $\frac{3lg4+lg0,5}{lg9-lg18}$; б) $\frac{lg625-8lg2}{\frac{1}{2}lg256-2lg5}$.

7. Побудуйте графік функції:

а) y=$\log_2(x+3)$; б) y= $\log_{\frac{1}{2}} x - 3$;

в) y=$3^{\log_3(x+3)}$; г) y=$|\log_3 x|$; д) y=$\log_3|x|$.

8. Розв'яжіть рівняння графічно:

а) $\log_2 x = 3 - x$; б) $\log_3 x = 4 - x$; в) $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 1$.

9. Знайдіть область визначення функції:

а) y=$\log_3(x+1)$; б) y=$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)$;

в) y=$\log_6(x^2-1)$; г) y=2lgx+3lg(2-x); д) y=$\log_5 \frac{2x-3}{x-1}$; е) y=$\log_{x+3}(x^2+x)$.

10. Порівняйте: а) $\log_6 12$ і $\log_6 10$; б) $\log_{0,9}\sqrt{3}$ і $\log_{0,9}\sqrt{2}$;

в) $\log_{0,5}\frac{4}{5}$ і $\log_{0,5}\frac{5}{6}$; г) $\log_4 5$ і 0; д) $\log_{0,3} 0,5$ і 0; е) $\log_{\pi} 1,7$ і 1.

11. Розв'яжіть рівняння:

а) $\log_2(\mathrm{x}-1)=1$; б) $\log_3(2\mathrm{x}+1)=3$;

в) $\log_{\frac{1}{6}}(4\mathrm{x}-8)=-2$; г) $\log_{\frac{1}{2}}(\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}-5)=-4$; д) $\log_{\sqrt{3}}(5\mathrm{x}-3)=2$.

12. Розв'яжіть рівняння: а) $\log_5(3\mathrm{x}-5)=\log_5(\mathrm{x}-3)$;

б) $\log_2(\mathrm{x}^2-2\mathrm{x})=\log_2(2\mathrm{x}+12)$;

в) $\log_{0,6}(\mathrm{x}+2)+\log_{0,6}(6-\mathrm{x})=\log_{0,6}(\mathrm{x}+8)$;

г) $2\lg(x+1)-\lg(4x-5)=\lg(x-5)$;

д) $\log_3(2\mathrm{x}-1)+\log_3(\mathrm{x}-4)=2$;

е) $\log_2(5-\mathrm{x})-\log_2(\mathrm{x}-1)=1-\log_2(\mathrm{x}+2)$.

13. Розв'яжіть рівняння: а) $log_2^2x+3log_2x-4=0$;

б) $log_3^2x-log_3x-2=0$; в) $\log_5\mathrm{x}+\log_{\mathrm{x}}5=2,5$;

г) $2\log_7\sqrt{x}=log_7^2x-6$; д) $3\log_3\mathrm{x}+3\log_{\mathrm{x}}3=10$;

д) $\frac{lgx}{\lg x+2}-\frac{2}{lgx-1}=1$; е) $\log_3 x^2\cdot\log_3\frac{\mathrm{x}}{27}+4=0$.

14. Розв'яжіть нерівність:

а) $\log_8(2\mathrm{x}-3)>\log_8 7$; б) $\log_{\frac{2}{9}}(\mathrm{x}-4)\geq\log_{\frac{2}{9}}2$;

в) $\log_{0,5}(\mathrm{x}-2)<2$; г) $\log_7(9\mathrm{x}+4)\leq 2$;

д) $\log_{0,5}(2\mathrm{x}+1)\geq -1$; е) $\log_{\frac{1}{4}}(\mathrm{x}+1)>-\frac{3}{2}$;

є) $\log_{0,7}(\mathrm{x}^2+10\mathrm{x}+25)\geq 0$; ж) $\log_6(5\mathrm{x}+8)+\log_6(\mathrm{x}+1)\leq 1-\log_6 3$;

з) $log_2^2x-5log_2x+6\geq 0$; і) $log_{0.2}^2x-log_{0.2}x-2\leq 0$;

й) $lg^2x-2lgx-3\geq 0$; к) $\log_{2\mathrm{x}-3}\mathrm{x}>1$;

л) $\log_{\mathrm{x}-2}(2\mathrm{x}-7)<1$; м) $\log_{0,8}\log_2\frac{3\mathrm{x}-1}{2-\mathrm{x}}>0$.