Практичне заняття 5

Складання рівнянь прямої на площині.

Мета: Формування практичних навиків застосування рівнянь прямих, обчислення кута між прямими, використання умов паралельності та перпендикулярності прямих.

Тривалість заняття: 2 години.

Методичні вказівки з виконання і оформлення: при виконанні практичних завдань скористайтеся вивченими рівняннями прямої на площині.

Теоретичні питання для обговорення

1. Як записати рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора?
2. Який вигляд має загальне рівняння прямої на площині?
3. Як записати рівняння прямої, що проходить через початок координат?
4. Як записати рівняння прямої, що паралельна осі Ox? осі Oy?
5. Як записати рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?
6. Як записати рівняння прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямі?
7. Як записати рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?
8. Який вигляд має канонічне рівняння прямої?
9. Як знайти кут між двома прямими?

10 Які умови перпендикулярності і паралельності двох прямих?

11. Який вигляд має нормальне рівняння прямої?
12. Як звести загальне рівняння прямої до нормального?
13. Як знайти відстань від точки до прямої?

Теоретична частина

рівняння прямої за двома точками

Нехай $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2, y_2)$ - дві точки прямої L. Неважко побачити, що дві точки прямої визначають її напрямлений вектор, який в цьому випадку лежить на прямій L: $\vec{u} = \overrightarrow{M_1M_2}$. Тому координати вектора $\vec{u}$ визначимо за формулами: $l = x_2 - x_1$, $m = y_2 - y_1$. Підставляючи значення у рівняння $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}$, дістанемо:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (1)$$

відстань від точки до прямої

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ знаходиться за формулою

$$d = \left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \qquad (2)$$

кут між двома прямими

Для прямих, що задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом	$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$	(3)

Для прямих, що задані загальними рівняннями	$\cos\theta = \pm\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$	(4)
Для прямих, що задані канонічними рівняннями	$\cos\theta = \pm\frac{l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2}}$	(5)

рівняння прямої, паралельної даній

Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$ паралельно прямій $Ax+By+C=0$.

Кожного разу, коли задається точка, то рівняння прямої краще знаходити за формулою

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad (6)$$

де $k=-\frac{A}{B}$ – знаходимо із загального рівняння прямої і умови паралельності прямих.

умови паралельності прямих

Для прямих, що задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом	$k_2=k_1$	(7)
Для прямих, що задані загальними рівняннями	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$	(8)
Для прямих, що задані канонічними рівняннями	$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}$	(9)

рівняння прямої, що перпендикулярна даній

Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно прямій $Ax+By+C=0$.

Для розв'язування таких задач слід використовувати туж саму формулу, що і в попередньому пункті, а саме $y-y_0=k(x-x_0)$,
де $k=-\frac{A}{B}$ – знаходимо із загального рівняння прямої і умови перпендикулярності прямих.

умови перпендикулярності прямих

Для прямих, що задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом	$k_2=-\frac{1}{k_1}$	(10)
Для прямих, що задані загальними рівняннями	$A_1A_2+B_1B_2=0$	(11)
Для прямих, що задані канонічними рівняннями	$l_1l_2+m_1m_2=0$	(12)

знаходження точки перетину двох прямих

Координати точки перетину двох прямих (якщо вони не паралельні), знаходяться як розв'язок системи: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$.

Зразки виконання завдань на складання рівнянь прямої

Приклад 1. Записати рівняння прямої, що проходить через точки $A(-2;3)$, $B(4;5)$.

Розв'язання:

підставивши координати точок у формулу (1), отримаємо:

$\frac{x+2}{4+2} = \frac{y-3}{5-3} \Rightarrow \frac{x+2}{6} = \frac{y-3}{2}$ або $2(x+2) = 6(y-3) \Rightarrow 2x + 4 = 6y - 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - 6y + 4 + 18 = 0 \Rightarrow 2x - 6y + 22 = 0 \Rightarrow x - 3y + 11 = 0.$

Приклад 2. Знайти відстань від точки $M_0(-4; 2)$ до прямої $12x - 5y - 7 = 0$.

Розв'язання:

підставивши координати точки у формулу (2) та координати нормального вектора прямої, отримаємо: $d = \left|\frac{12\cdot(-4)-5\cdot2-7}{\sqrt{12^2+5^2}}\right| = \frac{65}{13} = 5.$

Приклад 3. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(3; 4)$ паралельно прямій $3x - 5y + 7 = 0$.

Розв'язання:

із загального рівняння прямої $3x - 5y + 7 = 0$, знайдемо k_1: $k_1 = -\frac{3}{-5} = \frac{3}{5}$. Із умови паралельності (7), знаходимо k_2: $k_2 = k_1 = \frac{3}{5}$. Підставимо координати точки M_1 та значення кутового коефіцієнта у формулу (6), отримаємо:

$y - 4 = \frac{3}{5}(x - 3) \Rightarrow 5(y - 4) = 3(x - 3) \Rightarrow 5y - 20 = 3x - 9 \Rightarrow 3x - 5y + 11 = 0.$

Приклад 4. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(-3; 2)$ перпендикулярно до прямої $2x + 7y - 6 = 0$.

Розв'язання:

Із загального рівняння прямої $2x + 7y - 6 = 0$, знайдемо k_1: $k_1 = -\frac{2}{7}$. Із умови перпендикулярності (10), знаходимо k_2: $k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{7}{2}$. Підставимо координати точки M_1 та значення кутового коефіцієнта у формулу (6), отримаємо:

$y - 2 = \frac{7}{2}(x + 3) \Rightarrow 2(y - 2) = 7(x + 3) \Rightarrow 2y - 4 = 7x + 21 \Rightarrow 7x - 2y + 25 = 0.$

Приклад 5. Знайти точки перетину прямих $5x - 2y - 4 = 0$ та $3x + 4y - 18 = 0$.

Розв'язання:

Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} 5x - 2y - 4 = 0 \\ 3x + 4y - 18 = 0 \end{cases}$, що складається з рівнянь прямих. Домножимо перше рівняння на 2 і додамо результат до другого рівняння:

$$
\begin{array}{l}
\ 10x - 4y - 8 = 0 \\
+ \\
\ 3x + 4y - 18 = 0 \\
\hline
\ 13x - 26 = 0 \Rightarrow x = 2
\end{array}
$$

Підставивши $x = 2$ в перше рівняння маємо: $5 \cdot 2 - 2y - 4 = 0 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$.

Отже точка перетину даних прямих - $A(2; 3)$.

Практична частина

1. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $5x + 3y + 8 = 0$, $x - 4y + 20 = 0$ паралельно прямій $4x + 3y - 5 = 0$.

2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $5x + y - 7 = 0$, $3x - 2y - 12 = 0$ перпендикулярно прямій $3x + y - 4 = 0$.

3. Знайти відстань між прямими $4x - 3y - 10 = 0$, $8x - 6y + 15 = 0$.

4. Знайти відстань від точки $A(-4; 3)$ до прямої, що проходить через точки $M_1(-1; 2)$, $M_2(3; -1)$.

5. Скласти рівняння катетів рівнобедреного прямокутного трикутника знаючи рівняння гіпотенузи $3x - y + 5 = 0$ і вершину прямого кута $(-4; 1)$.

6. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $P(5; 2)$ і відтинає на осях координат рівні відрізки.

7. Знайти точку перетину медіан трикутника з вершинами $A(-4; 2)$, $B(2; -5)$, $C(5; 0)$.

8. Дано трикутник з вершинами $A(-1; 2)$, $B(3; 4)$, $C(1; -6)$. Обчислити відстань від вершини B до медіани, яка проведена із вершини A.

9. Дано дві вершини трикутника ABC $A(-4; 4)$, $B(4; -12)$ і точку $M(4; 2)$ перетину його висот. Знайти координати вершини C.

10. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2; -3)$ і точку перетину прямих $2x - y - 5 = 0$ і $x + y - 1 = 0$.

11. Знайти точку перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$, якщо $A(-1; -3)$, $B(3; 5)$, $C(5; 2)$, $D(3; -5)$.