Лекція 4

Тема: Пряма лінія на площині її рівняння та розташування.

Мета: ввести поняття прямої на площині, ознайомити з різними видами прямої на площині.

План

1. Пряма як лінія першого порядку. Загальне рівняння прямої. Дослідження неповного рівняння прямої.

2. Рівняння прямої у відрізках на осях. Параметричні і канонічні рівняння прямої. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

3. Кут між двома прямими. Умови перпендикулярності і паралельності двох прямих.

4. Нормальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої.

1. Пряма як лінія першого порядку. Загальне рівняння прямої. Дослідження неповного рівняння прямої

З шкільного курсу математики вам відомо, що предметом вивчення геометрії є геометричні об'єкти (точки, лінії, фігури), а предметом вивчення алгебри – числа, рівняння, функції.

Предметом вивчення аналітичної геометрії є вивчення геометричних образів алгебраїчними образами.

Для застосування методів алгебри до розв'язування задач геометрії встановлюється зв'язок між геометричним об'єктом та числами. Способом встановлення такого зв'язку є метод координат, який вперше використав французький математик Рене Декарт (1596-1650).

Основним методом аналітичної геометрії є метод координат.

Таким чином, метод координат дозволяє кожному геометричному образу поставити у відповідність його рівняння, а потім шляхом аналітичного дослідження цього рівняння вивчити властивості цього геометричного об'єкта.

В аналітичній геометрії вивчають дві основні задачі:

1. Складання рівняння геометричного об'єкта, який розглядають як геометричне місце певних точок.

2. Дослідження властивостей геометричного об'єкта за його рівнянням і побудувати його.

Виділяють також дві найпростіші задачі аналітичної геометрії:

1. Знаходження відстані між двома точками;

2. Ділення відрізка у заданому відношенні.

Кожну пряму на площині можна визначити лінійним рівнянням відносно вибраної системи координат; і навпаки, кожне лінійне рівняння визначає пряму в цій координатній системі.

Означення. *Рівнянням лінії* L у декартовій системі координат на площині називається рівняння виду $F(x; y) = 0$, яке задовольняють координати (x, y) у кожній точці цієї лінії і не задовольняють координати жодної іншої точки.

Нехай на площині задано пряму L. Складемо ЇЇ рівняння відносно прямокутної системи координат (рис.1).

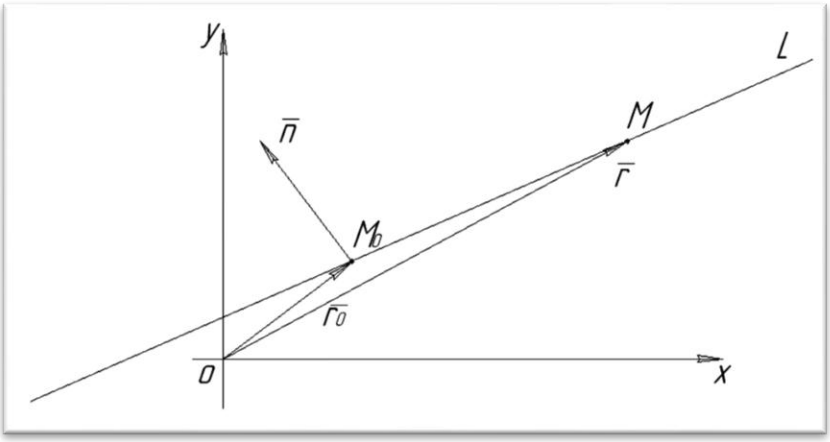

Рис. 1

Візьмемо на прямій точку $M_0(x_0;\, y_0)$, а на площині вектор $\vec{n} = \vec{\imath} \cdot A + \vec{\jmath} \cdot B$, перпендикулярний до L.

Позначимо довільну точку L через $M(x, y)$. Вектори MM_0 і n взаємно перпендикулярні. Отже, скалярний добуток їх дорівнює нулеві: $\left(\overrightarrow{MM_0}, \vec{n}\right) = 0$ або в координатах:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (4.1)$$

Це і є рівняння прямої L. Воно лінійне. Розкривши дужки і ввівши деякі позначення, отримаємо довільне лінійне рівняння:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (4.\ 2)$$

його називають *загальним рівнянням прямої на площині*.

Вектор n, перпендикулярний до прямої L, називають вектором її нормалі. Дослідимо, як розміщена пряма відносно системи координат $0xy$, якщо рівняння (4.2) неповне, тобто коли деякі його коефіцієнти дорівнюють нулю.

Лінію, яка лежить в площині, називається *плоскою*.

Дослідження загального рівняння прямої

1) Якщо коефіцієнт $C = 0$, то пряма проходить через початок координат.

2) Якщо $B = 0$, то пряма $Ax + C = 0$ паралельна осі $0y$.

3) Аналогічно, якщо $A = 0$, то пряма паралельна осі $0x$.

4) Якщо $B = C = 0$, то пряма $Ax = 0$ співпадає з віссю $0y$. Отже, $x = 0$ є рівняння осі $0y$.

5) Якщо $A = C = 0$, то пряма $By = 0$ співпадає з віссю $0x$. Отже, $y = 0$ є рівняння осі $0x$.

Зауваження: іноді замість виразу «*задано рівняння лінії*» будемо вживати вираз «*задана лінія*».

2. Рівняння прямої у відрізках на осях. Параметричні і канонічні рівняння прямої. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Запишемо тепер рівняння прямої у відрізках на осях.

Нехай пряма L, перетинає вісь $0x$ у точці M, а вісь $0y$ – у точці N. Відрізок OM дорівнює a, а відрізок ON – b, тобто точка M має координати $x = a$, $y = 0$, а точка

$N\ -\ x = 0, y = b$. Ці точки лежать на прямій $Ax + By + C = 0$, Це означає, що координати точок M і N задовольняють рівняння прямої (рис. 2).

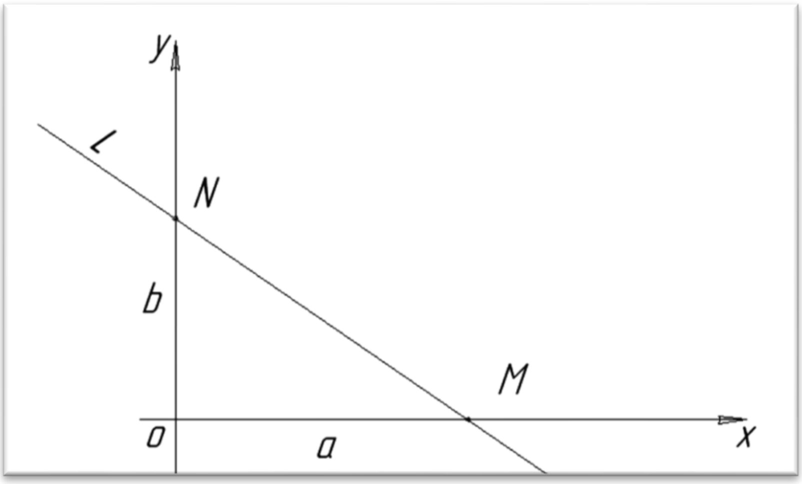

Рис. 2

Підставимо координати точки M у рівняння прямої. Отримаємо $A \cdot a + C = 0$. Звідси $A = -\frac{C}{a}$. Аналогічно для точки N: $B \cdot b + C = 0$, $B = -\frac{C}{b}$. Тепер підставимо значення A і B у рівняння прямої $-\frac{C}{a}x + -\frac{C}{b} + C = 0$. Звідси отримаємо *рівняння прямої у відрізках на осях*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (4.\ 3)$$

Далі розглянемо параметричні і канонічні рівняння прямої.

Нехай пряма L проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно вектору $\vec{u} = i \cdot \vec{l} + j \cdot \overrightarrow{m}$. Позначимо радіус – вектор точки $M_0(x_0; y_0)$ через $\overrightarrow{r_0}$, а радіус – вектор довільної точки $M(x;\ y)$ – через $\vec{r}$. Вектори $\overrightarrow{MM_0} = \vec{r} - \overrightarrow{r_0}$ і $\vec{u}$ колінеарні (рис. 3).

$$\vec{r} - \overrightarrow{r_0}\ =\ t \cdot \vec{u} \qquad (4.\ 4)$$

Отже, їх координати пропорційні

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \qquad (4.\ 5)$$

або

$$\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t \\ y = y_0 + m \cdot t \end{cases} \qquad (4.\ 6)$$

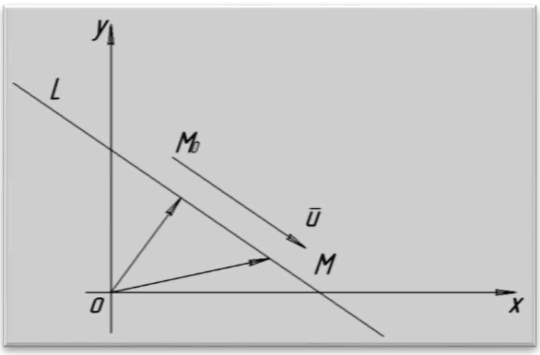

Рис. 3

Рівняння (4.4) є *векторне* рівняння прямої L, яку задано точкою і напрямним вектором $\vec{u}$.

Рівняння (4.5) називають *канонічним* рівнянням прямої, а рівняння (4.6) – її *параметричними* рівняннями.

Найчастіше пряму на площині задають двома своїми точками. Покажемо, як у цьому випадку скласти її рівняння.

Нехай $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2, y_2)$ - дві точки прямої L. Неважко побачити, що дві точки прямої визначають її напрямлений вектор, який в цьому випадку лежить на прямій L: $\vec{u} = \overrightarrow{M_1M_2}$. Тому координати вектора $\vec{u}$ визначимо за формулами: $l = x_2 - x_1$, $m = y_2 - y_1$. Підставляючи значення у рівняння (4.5), дістанемо:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (4.7)$$

рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Нехай тепер пряму задано точкою $M_0(x_0, y_0)$ і кутом φ, який вона утворює з додатним напрямом вісі $0x$.

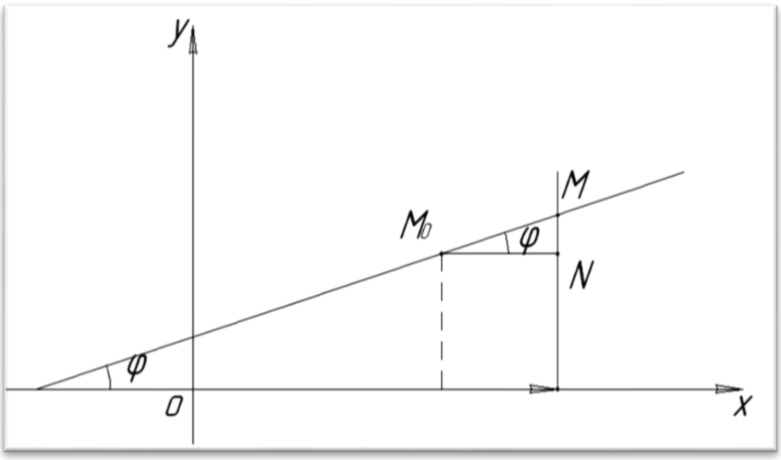

Рис. 4

Позначимо через $M(x;\ y)$ довільну точку прямої L. З трикутника M_0MN (рис. 4) знайдемо:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \operatorname{tg}\varphi \text{ або } y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (4.8)$$

$k = \operatorname{tg}\varphi$ – кутовий коефіцієнт прямої.

Рівняння (4.8) називають *рівнянням прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямі.*

В рівнянні (4. 8) розкриємо дужки:

$$y = kx - kx_0 \Rightarrow y = kx + (-kx_0 + y_0) \Rightarrow y = kx + b$$

$$y = kx + b \qquad (4.9)$$

Рівняння (4.9) називають *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.*

Для переходу від загального рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ до рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом необхідно перше розв'язати відносно y.

$Ax + By + C = 0 \Rightarrow By = -Ax - C \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \Rightarrow y = kx + b,$ де $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$.

3. Кут між двома прямими. Умови перпендикулярності і паралельності двох прямих

Розглянемо дві прямі, що не паралельні осі Oy. Точку перетину цих прямих позначимо через M, точки перетину їх з віссю Ox – через K і M, а кути нахилу до осі Ox – через φ_1 і φ_2. З трикутника KMN (рис.5) дістанемо $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$. Отже

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Але $\operatorname{tg}\varphi_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\varphi_2 = k_2$, тому $\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ (4.10)

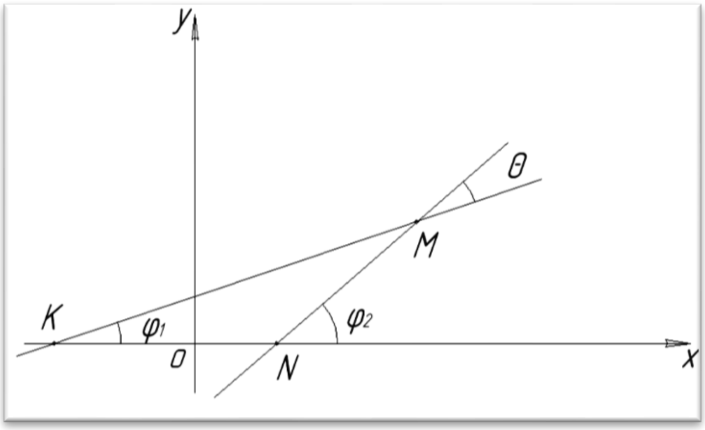

Рис. 5

Якщо дві прямі, між якими потрібно визначити кут, задано загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \; A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

то краще користуватись формулою:

$$\cos\theta = \pm\frac{A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \qquad (4.11)$$

Розглянемо тепер умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.

Якщо прямі паралельні, то кут $\theta = 0$. Тоді з (1.10) витікає, що $k_2 - k_1 = 0$, тобто

$$k_2 = k_1 \qquad (4.12)$$

Умова (4.12) і є *умовою паралельності двох прямих*.

У випадку, коли прямі задано загальними рівняннями, то умова паралельності записується у вигляді: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

З формули (1.10) також легко отримати умову перпендикулярності двох прямих. Справді, якщо $\theta = \frac{\pi}{2}$, то $1 + k_2 \cdot k_1 = 0$. Звідси, якщо *прямі перпендикулярні*, то

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \text{ або } k_2 = -\frac{1}{k_1} \qquad (4.13)$$

У випадку, коли прямі задано загальними рівняннями, то умова перпендикулярності має вигляд: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

4. Нормальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої

Нехай задано пряму L. Через початок О системи координат проведемо нормаль до прямої і позначимо кут нахилу нормалі до осі Ox через α, точку її перетину з прямою L - через M_0. а довжину відрізка OM_0 - через p. Напрям прямої від O до M_0 будемо вважати додатним. Величини a і p цілком визначають положення прямої L на площині.

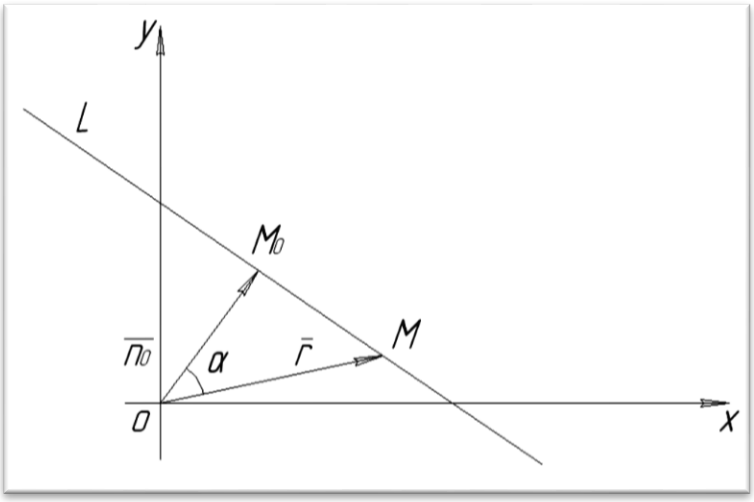

Рис. 6

Позначимо через *M* довільну точку прямої L, орт нормалі – через $\overrightarrow{n}_0 = \vec{\imath} \cdot \cos a + \vec{\jmath} \cdot \sin a$. Спроектуємо радіус - вектор *r* точки *M* на нормаль.
$np_{\overrightarrow{n_0}} \vec{r} = \vec{r} \cdot \overrightarrow{n_0}$, але $np_{\overrightarrow{n_0}} \vec{r} = p$. Отже, $\vec{r} \cdot \overrightarrow{n_0} = p$. Виразимо скалярний добуток двох векторів через їх координати.

Дістанемо рівняння

$$x \cdot \cos a + y \cdot \sin a - p = 0 \qquad (4.14)$$

Рівняння (4.14) називають *нормальним рівнянням прямої*.

Нехай пряму L задано нормальним рівнянням $x \cdot \cos a + y \cdot \sin a - p = 0$. Проведемо через точку $M_0(x_0; y_0)$ пряму, що паралельна L. Її рівняння запишемо у нормальному вигляді; знаючи, що обидві прямі відрізняються тільки відстанню від початку координат:

$x \cdot \cos a + y \cdot \sin a - p_1 = 0$. Але, $p_1 = p + d$. Тому, враховуючи, що пряма проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$, отримаємо $d = x_0 \cdot \cos a + y_0 \cdot \sin a - p$.

Якщо точка $M_1(x_1; y_1)$ лежить між початком координат і прямою, то $p_1 = p - d$. Тоді $d = |x_1 \cdot \cos a + y_1 \cdot \sin a - p|$.

У загальному випадку відстань точки від прямої записуємо так:

$$d = |x_M \cdot \cos a + y_M \cdot \sin a - p| \qquad (4.15)$$

Якщо рівняння прямої задано у загальному вигляді, то $d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$.