Тема 6. Знаходження оберненої матриці

План

1. **Теоретичні відомості.**
2. **Завдання для самостійного виконання.**

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.

2.2 Зразок оформлення ІДЗ.

Теоретичні відомості

обернена матриця

Квадратна матриця називається *невиродженою* (*неособливою*), якщо її визначник відмінний від нуля $detA \neq 0$, і *виродженою* (*особливою*) в противному випадку $detA = 0$.

Всяка невироджена матриця $A = (a_{ij})$ порядку n має *обернену матрицю* того ж порядку $A^{-1} = (a_{ij}^{-1})$, що задовольняє співвідношення $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

де A_{ij} - алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} у визначнику $|A|$ матриці A, тобто $a_{ij}^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_{ij}$.

алгоритм знаходження оберненої матриці

1. Знайти визначник матриці, якщо він не дорівнює нулю, то дана матриця має обернену.
2. Знайти алгебраїчні доповнення елементів даної матриці.
3. Скласти з алгебраїчних доповнень матрицю $\tilde{A}$ – *союзну матрицю.*
4. Транспонуємо матрицю $\tilde{A}$.
5. Використовуючи формулу (1) записуємо обернену матрицю.

2. Завдання для самостійного виконання

Індивідуальне домашнє завдання (номер варіанта відповідає номеру у журналі)

Знайти матрицю обернену до матриці A.

1	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -5 \\ -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -5 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

4	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} -5 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & -4 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -5 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -5 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} -5 & -2 & -4 \\ -5 & -4 & -3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -5 & -4 & 5 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & -2 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

1. Опрацювати теоретичний матеріал.
2. Оформити роботу в зошиті для самостійних робіт.

2.2 Зразок оформлення індивідуального домашнього завдання

Завдання. Знайти матрицю обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

1) Обчислимо визначник матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \cdot 0 + 5 \cdot 4 \cdot 1 - 5 \cdot 3 \cdot 0 - 4 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) = 2;$$

Оскільки $\Delta = 2 \neq 0$, то існує обернена матриця.

2) Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10;$ $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2;$ $A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4;$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 22;$ $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4;$ $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -8;$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -19;$ $\qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -3;$ $\qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$

3) Записуємо нову матрицю: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -10 & 22 & -19 \\ -2 & 4 & -3 \\ 4 & -8 & 7 \end{pmatrix}.$

4) Транспонуємо матрицю $\tilde{A}$: $\tilde{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -10 & -2 & 4 \\ 22 & 4 & -8 \\ -19 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$

5) За формулою (1) записуємо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -10 & -2 & 4 \\ 22 & 4 & -8 \\ -19 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 11 & 2 & -4 \\ -9{,}5 & -1{,}5 & 3{,}5 \end{pmatrix}.$$