Лекція 4

Тема: Визначники другого третього порядку, методи їх обчислення.

Мета: Ознайомити з поняттям визначника, навчитися обчислювати визначники 2-го та 3-го порядку, ознайомитися з оберненою матрицею та алгоритмом її знаходження.

План

1. Визначники другого порядку.
2. Визначники третього порядку.
3. Мінор, алгебраїчне доповнення, обчислення визначника розкладанням за елементами першого рядка.
4. Основні властивості визначника.
5. Обернена матриця та алгоритм її знаходження.

1. Визначники другого порядку

Означення. *Визначником* (*детермінантом*) називається вираз, складений за певним законом з n^2 елементів (чисел, функцій, векторів тощо).

Позначають визначник

$$\Delta= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{13} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4.1}$$

де a_{ij} — елементи визначника, $i, j = 1, \dots, n$.

Означення. *Визначником другого порядку* називається вираз

$$\Delta= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{4.2}$$

де a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} – елементи визначника; $a_{11}a_{22}$ – *елементи головної діагоналі*; $a_{21}a_{12}$ – *елементи допоміжної діагоналі*.

Приклад. Обчислити визначники: 1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

1) $\Delta= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2;$

2) $\Delta= \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 14.$

2. Визначники третього порядку

Означення. *Визначником третього порядку* називається число

$$\Delta= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33} \tag{4.3}$$

Схема (4.3) обчислення визначників третього порядку називається *правилом трикутника*.

Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

Лекція 4

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=1\cdot5\cdot9+4\cdot8\cdot3+2\cdot6\cdot7-7\cdot5\cdot3-8\cdot6\cdot1-9\cdot2\cdot4=45+96+84-105-48-72=0$$

3. Мінор, алгебраїчне доповнення, обчислення визначника розкладанням за елементами першого рядка

Означення. *Мінором* M_{ij} деякого елемента a_{ij} визначника називають визначник, який дістається із заданого визначника викреслюванням i–рядка та j–стовпця, на перетині яких розташований елемент.

Приклад. Знайти M_{32} елемента a_{32} визначника $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 5 & 6\\ -2 & 1 & 4\end{vmatrix}$.

Розв'язання:

$$a_{32}=1,\ M_{32}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}=a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & 6\end{vmatrix}6-0=6.$$

Означення. *Алгебраїчним доповненням* A_{ij} елемента a_{ij} визначника, називають мінор цього елемента, взятий зі знаком « $+$ », якщо сума номерів викреслених стовпця та рядка є число парне, і зі знаком « $-$ », якщо ця сума – непарна, тобто

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij} \qquad (4.\,4)$$

Приклад. Знайти алгебраїчні доповнення A_{32}, A_{13} відповідних елементів визначника $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 5 & 6\\ -2 & 1 & 4\end{vmatrix}$.

Розв'язання:

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & 6\end{vmatrix}=-6; \qquad A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=\begin{vmatrix}0 & 5\\ -2 & 1\end{vmatrix}=10.$$

Поняття алгебраїчного доповнення дає можливість ще одного способу обчислення визначника, який стверджується наступною теоремою.

Теорема (про розклад визначника). Визначник дорівнює сумі добутків елементів рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \qquad (4.\,5)$$

або

$$\Delta=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

Зауваження:

- ✓ Дана теорема дозволяє знизити порядок визначника на одиницю.

Для скорочення обчислення визначника доцільно його розкладати за елементами такого рядка чи стовпця, який містить найбільшу кількість нулів.

4. Основні властивості визначника

Лекція 4

транспортування визначників

Величина визначника не змінюється, якщо всі його рядки зробити стовпцями, а стовпці – рядками не змінюючи їх нумерації. Вказана операція називається *транспонуванням*.

Зауваження. З цієї властивості випливає рівноправність рядків і стовпців визначника.

властивості визначників

1) Якщо у визначника поміняти місцями два рядки (стовпці), то визначник змінить знак на протилежний.

2) Якщо елементи двох рядків (стовпців) визначника однакові, то визначник дорівнює нулю.

3) Якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

4) Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник також дорівнює нулю.

5) Якщо всі елементи будь-якого рядка(стовпця) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

6) Величина визначника не зміниться, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати елементи другого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число.

Зауваження. Використовуючи цю властивість можна одержати максимальне число нульових елементів в будь-якому рядку (стовпці) визначника, після чого його обчислення значно спрощується.

Приклад:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -18$$

7) Якщо елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то цей визначник дорівнює сумі двох відповідних визначників.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & a_{13}+b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Зауваження. Цю властивість можна узагальнити на випадок довільного числа доданків.

5. Обернена матриця та алгоритм її знаходження

Знаходження оберненої матриці є важливою складовою в розділі лінійної алгебри. З допомогою таких матриць, якщо вони існують, можна швидко знайти розв'язок системи лінійних рівнянь або обчислити матричне рівняння $A \cdot X = B$. Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A, якщо виконуються наступні рівності $A^{-1}A = AA^{-1} = E$. Якщо визначник матриці A відмінний від нуля, то матрицю називають неособливою або невиродженою. Для того, щоб матриця мала обернену необхідно і достатньо, щоб вона була невиродженою.

Обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (4.6)$$

де A_{ij} - алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} у визначнику $|A|$ матриці A, тобто $a_{ij}^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_{ij}$.

алгоритм знаходження оберненої матриці

1. Знайти визначник матриці, якщо він не дорівнює нулю, то дана матриця має обернену.
2. Знайти алгебраїчні доповнення елементів даної матриці.
3. Скласти з алгебраїчних доповнень матрицю $\tilde{A}$ – *союзну матрицю.*
4. Транспонуємо матрицю $\tilde{A}$.
5. Використовуючи формулу (4.4) записуємо обернену матрицю.

Приклад. Знайти матрицю обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

1) Обчислимо визначник матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \cdot 0 + 5 \cdot 4 \cdot 1 - 5 \cdot 3 \cdot 0 - 4 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) = 2;$$

Оскільки $\Delta = 2 \neq 0$, то існує обернена матриця.

2) Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10;$ $\quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2;$ $\quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4;$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 22;$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4;$ $\quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -8;$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -19;$ $\quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -3;$ $\quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$

3) Записуємо нову матрицю: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -10 & 22 & -19 \\ -2 & 4 & -3 \\ 4 & -8 & 7 \end{pmatrix}$.

4) Транспонуємо матрицю $\tilde{A}$: $\tilde{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -10 & -2 & 4 \\ 22 & 4 & -8 \\ -19 & -3 & 7 \end{pmatrix}$.

5) За формулою (4.6) записуємо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -10 & -2 & 4 \\ 22 & 4 & -8 \\ -19 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 11 & 2 & -4 \\ -9{,}5 & -1{,}5 & 3{,}5 \end{pmatrix}.$$

питання для самоконтролю

1. Чи зміниться величина визначника, якщо в ньому замінити відповідні рядки стовпцями?

2. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Чому дорівнює визначник, якщо в ньому однаковими є відповідні елементи двох рядків (стовпців)?

4. Що таке мінор?

5. Записати для визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}$ мінор M_{31} та обчислити його.

6. Як знайти алгебраїчне доповнення?

7. Записати для визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}$ алгебраїчне доповнення елемента A_{23} та обчислити його.

8. Як зміниться визначник, якщо в ньому поміняти місцями два рядки (стовпці)?

9. Якщо у визначнику до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи другого рядка (стовпця), помножені на одне й теж число, то ...

10. Чому дорівнює визначник, у якого елементи одного рядка (стовпця) пропорційні відповідним елементам другого рядка (стовпця)?

література

1. Яковлев Г.Н., Каченовский М.И., Колягин Ю.М. Алгебра і початки аналізу, частина I. М.: Наука, 1987.

2. Яковлев Г.Н., Каченовский М.И., Колягин Ю.М. Алгебра і початки аналізу, частина II. М.: Наука, 1987.

3. Г.Н. Яковлєв. Геометрія . М.: Наука, 1987.

4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1989.

5. Богомолов М.Б. Практичні заняття з математики. Київ: Вища школа, 1983. Н.М.

6. І.І. Валуце, Г.Д. Ділігул. Математика для технікумів. М. Высшая школа, 1983.