Лекція 3

Тема: Матриця. Види матриць та дії над матрицями.

Мета: ознайомити з поняттям матриці, навчити виконувати дії над матрицями.

План

1. Означення матриці. Види матриць.
2. Дії над матрицями.
3. Властивості операцій над матрицями.

1. Означення матриці. Види матриць

Означення. *Матрицею* називають таблицю упорядкованих чисел або будь-яких інших об'єктів a_{ij}, $i = 1,\overline{m}$, $j = 1,\overline{n}$ розташованих в m-рядках та n-стовбцях.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Означення. Матриця яка має m рядків та n стовбців називається *матрицею розміру* $m \times n$ (перший множник вказує на кількість рядків, другий – стовбців)

Матриці позначають великими літерами $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \dots$, або можна зустріти і такі позначення $A = \left(a_{ij}\right)_{mn}$; $A = \left[a_{ij}\right]_{mn}$; $A = \left\|a_{ij}\right\|_{mn}$.

Матриця розміру $m \times n$ має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (3.1)$$

де числа a_{ij} називають елементами матриці (i – номер рядка, в якому розташований даний елемент, а j – номер стовпця).

Означення. Дві матриці A і B називаються *рівними* $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, якщо якщо вони мають однаковий розмір і їх відповідні елементи рівні між собою.

А тепер розглянемо основні види матриць.

Означення. Матрицю, в якій m – число рядків не дорівнює n – числу її стовбців ($m \neq n$), називають *прямокутною*.

Приклад: матриця вигляду $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ є прямокутною розміру 3×2.

Означення. Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості стовпців ($m = n$), то матрицю називають *квадратною*, а число n – *порядком* матриці.

Приклад: матриця $\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ є квадратною другого порядку.

Означення. Матриця, в якої лише один рядок, називається *матрицею – рядком*.

Лекція 3

Означення. Матриця, в якої лише один стовпець називається *матрицею – стовпцем*.

Приклад:

$K = (1 \quad -2 \quad 3)$ – матриця – рядок розміру 1×3.

$N = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ – матриця – стовпець розміру 3×1.

Означення. Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то матриця називається *нульовою*.

Означення. Квадратна матриця, діагональні елементи якої $d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}$ відмінні від нуля, а всі інші дорівнюють нулю називається *діагональною*.

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3.2)$$

Означення. Діагональна матриця, всі діагональні елементи якої дорівнюють одиниці, називається *одиничною*. Позначають одиничну матрицю буквою Е:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad (3.3)$$

2. Дії над матрицями

Означення. *Сумою* двох матриць $A = (a_{ij})_{mn}$ і $B = (b_{ij})_{mn}$ розміру $m \times n$ називається матриця $C = (c_{ij})_{mn}$ кожний елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Приклад. Обчислити суму матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & -2+2 \\ 0+(-5) & -3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Віднімання матриць визначається як дія обернена додаванню, тобто $A - B = A + (-B) = C$, де $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Приклад. Обчислити різницю матриць $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$A - B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-4 & 6-0 \\ 3-(-2) & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Означення. *Добутком матриці* $A = (a_{ij})_{mn}$ *на число* λ називається нова матриця того самого розміру, кожний елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента матриці A на число λ, тобто $A \cdot \lambda = a_{ij}\lambda$.

Приклад. Обчислити $2A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Лекція 3

Розв'язання:

$$2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot(-2) & 2\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Означення. *Добутком матриці* $A = (a_{ij})_{mn}$ розміру $m \times n$ *на матрицю* $B = (b_{ij})_{ns}$ розміру $n \times s$ називають матрицю $C = (c_{ij})_{ms}$ розміру $m \times k$ елементи якої визначаються рівностями:

$$c_{ij} = \sum_{i=0}^{n} a_{ik} \times b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{in} \times b_{nj}, a_{ij}, i = 1, \overline{m}, j = 1, \overline{n}.$$

Таким чином, щоб дістати елемент c_{ij} матриці $C = A \cdot B$, слід елементи i–го рядка матриці A помножити на відповідні елементи j–го стовпця матриці B і знайдені добутки додати.

Зауваження. Добуток двох матриць існує тоді і тільки тоді, коли кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці: $A_{mn} \cdot B_{ns} = C_{ms}$.

Зауваження. Важливо зберігати вказаний порядок множення матриць.

Приклад. Обчислити добуток матриць:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;   2) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

1) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot(-3) + 3\cdot 0 & 1\cdot 4 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2 \\ -1\cdot 2 + 0\cdot(-3) + 1\cdot 0 & -1\cdot 4 + 0\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 5 + 1\cdot(-2) + (-1)\cdot(-3) \\ 2\cdot 5 + 3\cdot(-2) + 2\cdot(-3) \\ 1\cdot 5 + (-4)\cdot(-2) + 0\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}.$

Означення. Якщо $A \cdot B = B \cdot A$, то матриці A і B називаються *комутуючими* **(***переставними***)**

Означення. Матриця, що отримана з даної матриці A заміною її рядків стовбцями з тими самими номерами називається *транспонованою* до даної матриці.

Позначають матрицю транспоновану до даної матриці A: A^T.

Приклад. Записати матрицю транспоновану до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

Елементи першого рядка запишемо у перший стовпець, а другого рядка – у другий стовпець: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Властивості операцій над матрицями

1) $A + B = B + A$;

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

3) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, α, β – $const$ (числа);

4) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;

5) $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$;

6) $A(B\cdot C)=(A\cdot B)C$ – *асоціативність*;

7) $A(B+C)=AB+AC$ – *дистрибутивність*;

8) $A^k=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{k-\text{разів}}$, k – *ціле додатнє число*;

9) $A^0=E$.

питання для самоконтролю:

1. Що таке матриця?
2. Яка матриця називається квадратною? Прямокутною?
3. Яка матриця називається матрицею – стовпцем? Рядком?
4. Коли існує добуток двох матриць?
5. Що називають сумою та різницею двох матриць?
6. Що називають добутком матриці на число?
7. Яка матриця називається нульовою? Одиничною?
8. Яка матриця називається діагональною?
9. Яка матриця називається транспонованою?

література

1. Яковлев Г.Н., Каченовский М.И., Колягин Ю.М. Алгебра і початки аналізу, частина І. М.: Наука, 1987.

2. Яковлев Г.Н., Каченовский М.И., Колягин Ю.М. Алгебра і початки аналізу, частина ІІ. М.: Наука, 1987.

3. Г.Н. Яковлєв. Геометрія . М.: Наука, 1987.

4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1989.

5. Богомолов М.Б. Практичні заняття з математики. Київ: Вища школа, 1983. Н.М.

6. І.І. Валуце, Г.Д. Ділігул. Математика для технікумів. М. Высшая школа, 1983.