Графічне розв’язання систем лінійних нерівностей.

Нерівність – це два числа або математичних вирази, що з’єднані одним із знаків: > (більше), < (менше, у випадку строгої нерівності), ≥ (більше або дорівнює), ≤ (менше або дорівнює, у випадку нестрогої нерівності).

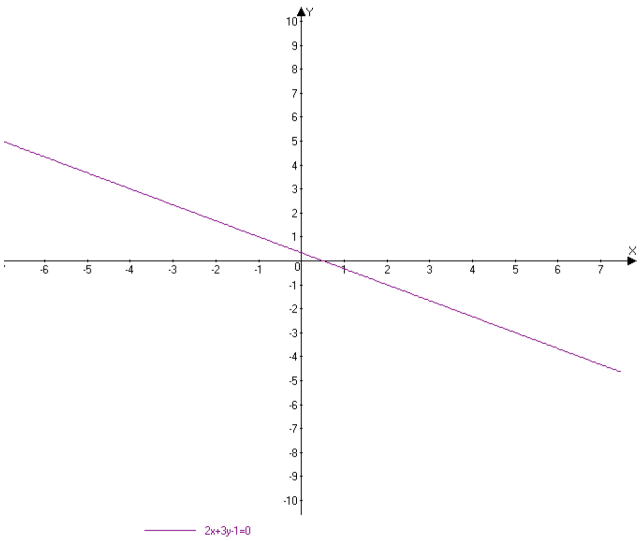
Нерівність являється *лінійною*, якщо вона містить змінні тільки у першому степеню і не містить добутку змінних.

Задану лінійну нерівність $ax+by+c><0$ можна розв’язати графічно таким чином: в прямокутній системі координат будуємо графік прямої $ax+by+c=0$. Тоді розв’язок заданої нерівності – геометрична множина точок однієї з двох півплощин, на які пряма ділить площину. Для знаходження розв’язку підставляємо координати довільної точки будь-якої з двох півплощин в задану нерівність: якщо одержана числова нерівність при цьому буде справедливою, то розв’язок заданої нерівності півплощина, в якій знаходиться обрана точка; в іншому випадку – друга півплощина.

<u>Приклад.</u> Розв’язати нерівність $2x+3y-1\le 0$

Розв’язання.

Будуємо графік прямої $2x+3y-1=0$ за двома точками $(-1;1)$, $(0{,}5;\ 0)$



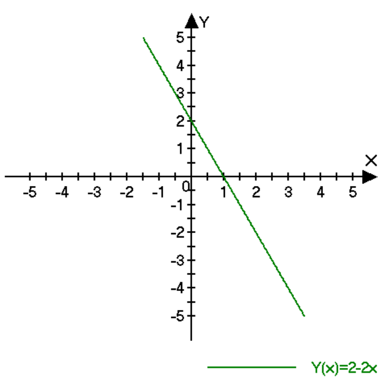
В задану нерівність підставляємо координати точки (0; 0), одержимо $2\cdot 0+3\cdot 0-1\le 0 \Leftrightarrow -1<0$ справедлива нерівність, тому розв’язок нерівності – це геометрична множина точок, розташованих в заштрихованій області разом з точками, які належать прямій $2x+3y-1=0$.

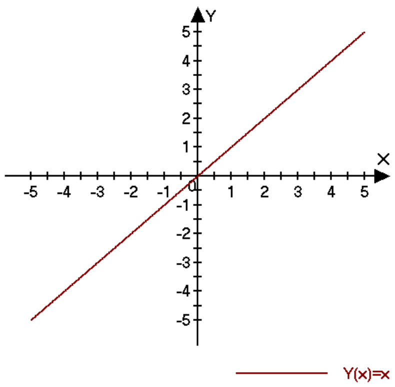
Розв'язок системи лінійних нерівностей.

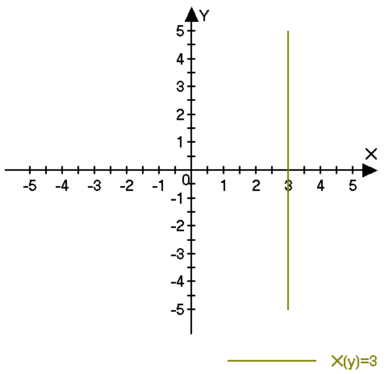
<u>Приклад.</u> Розв'язати систему нерівностей

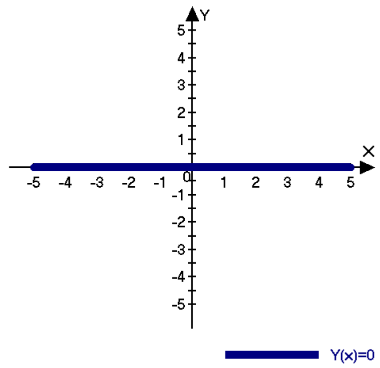
$$\begin{cases} 2x+y-2>0 \\ x-y>0 \\ x<3 \\ y>0 \end{cases}$$

Розв'язання.

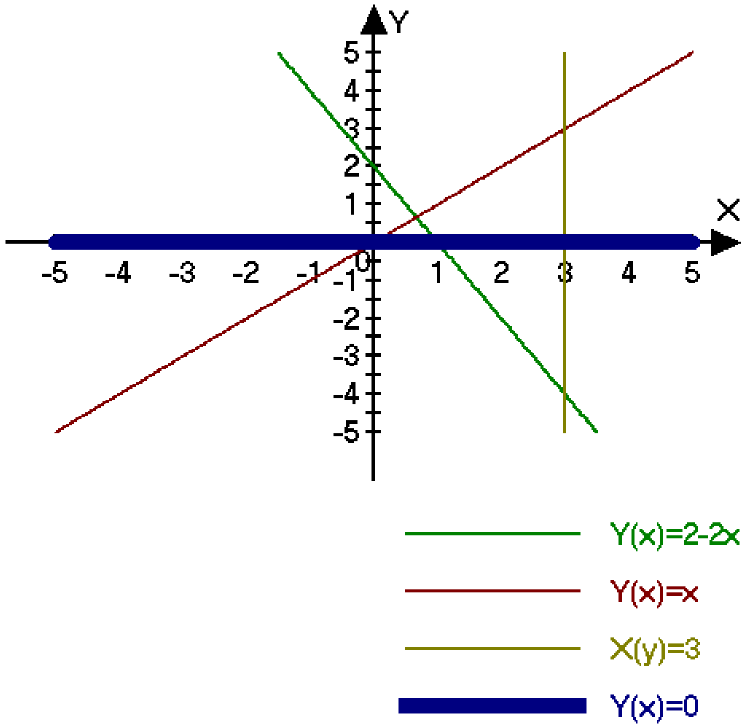








Розв'язок заданої системи лінійних нерівностей – це область, яка містить точки, координати яких задовольняють одразу всім чотирьом нерівностям.



Такою областю є чотирикутник ABCD (не включаючи границь).

Індивідуальне домашнє завдання № 10

Розв’язати систему нерівностей графічним способом

1	$\begin{cases} x+y\ge 2 \\ 2x-y\le 1 \\ y\le 4 \end{cases}$	**2**	$\begin{cases} x-2y\ge 1 \\ 2x+y\le 3 \\ y\ge -2 \\ x\ge 0 \end{cases}$	**3**	$\begin{cases} 3x+2y\ge 1 \\ x-y\le 5 \\ y\le 2 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x-y\le 1 \\ 3x+y\ge 3 \\ y\le 5 \end{cases}$	**5**	$\begin{cases} x+2y\ge 2 \\ x-y\le 5 \\ y\le 2 \end{cases}$	**6**	$\begin{cases} 3x-y\le 3 \\ 3x+y\ge 1 \\ y\le 4 \\ x\ge 0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x+2y\ge 1 \\ 2x-y\le 2 \\ y\le 2 \end{cases}$	**8**	$\begin{cases} 6x-y\le 6 \\ x+y\le 3 \\ x\ge 0 \end{cases}$	**9**	$\begin{cases} x-4y\ge 1 \\ 2x+4y\le 2 \\ y\ge -2 \\ x\ge 0 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x-2y\ge 2 \\ x+y\le 4 \\ y\ge -4 \end{cases}$	**11**	$\begin{cases} x-3y\le 3 \\ 3x+y\ge 6 \\ y\le 6 \end{cases}$	**12**	$\begin{cases} 5x+y\ge 1 \\ x-y\le 2 \\ y\le 3 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 4x-y\le 4 \\ x-y\le 2 \\ y\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases}$	**14**	$\begin{cases} 4x-y\ge 4 \\ 2x-y\le 1 \\ x\ge 0 \end{cases}$	**15**	$\begin{cases} x+y\le 3 \\ x-3y\ge 1 \\ y\ge 0 \\ x\ge -3 \end{cases}$
16	$\begin{cases} x+3y\le 3 \\ 3x-y\ge 1 \\ y\ge -5 \\ x\ge 0 \end{cases}$	**17**	$\begin{cases} x-3y\le 3 \\ 2x-y\ge 1 \\ y\ge -3 \\ x\le 0 \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} x-2y\le 2 \\ 3x+y\ge 6 \\ y\le 6 \end{cases}$
19	$\begin{cases} 4x-y\ge 2 \\ x+y\ge 1 \\ y\le -5 \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} 5x-y\ge 3 \\ x+4y\le 1 \\ y\ge -6 \end{cases}$		

Зразок розв’язання ІДЗ № 10

Розв’язати систему нерівностей графічним способом

$$\begin{cases} x + 2y - 2 \le 0; \\ y - x - 1 \le 0; \\ y + 2 \ge 0. \end{cases}$$

1. Випишемо рівняння, що відповідають нерівностям і побудуємо прямі.

x + 2y– 2 = 0

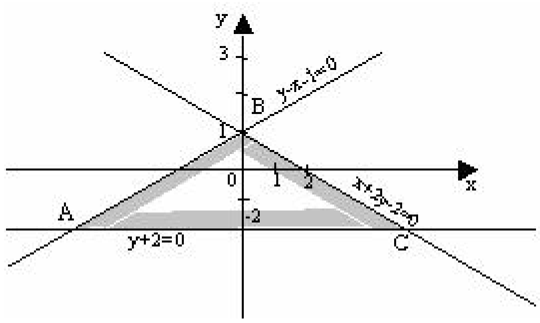
x	2	0
y	0	1

y – x – 1 = 0

x	0	2
y	1	3

y + 2 = 0;

y = –2.



2. Вибравши точку (0; 0), визначимо знак нерівностей в півплощинах:

$0 + 2 \cdot 0 – 2 \le 0$, тобто $x + 2y – 2 \le 0$ в півплощині нижче прямої;

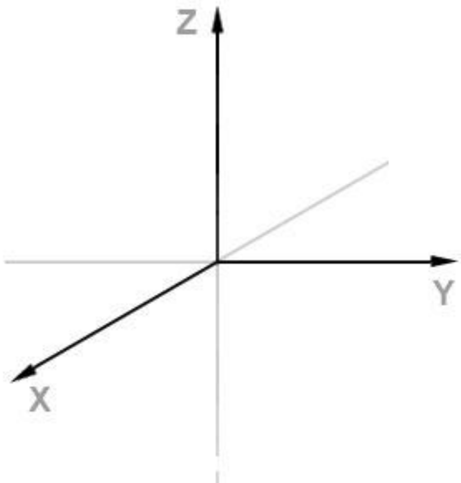
$0 – 0 – 1 \le 0$, тобто $y – x – 1 \le 0$ в півплощині нижче прямої;

$0 + 2 = 2 \ge 0$, тобто $y + 2 \ge 0$ в півплощині вище прямої.

Розв’язок заданої системи лінійних нерівностей – це область ΔABC, яка містить точки, координати яких задовольняють одразу всім трьом нерівностям, включаючи границі.

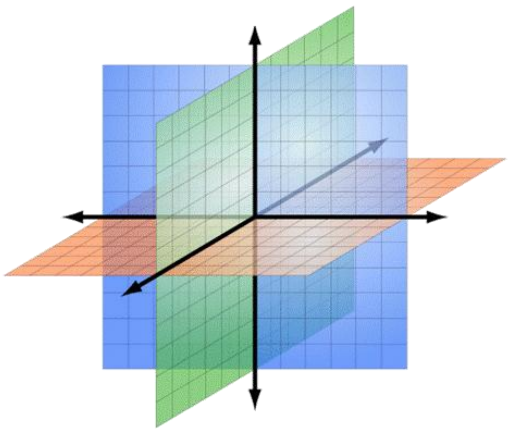
1.1 Прямокутні координати у просторі

Якщо через точку простору проведені 3 попарно перпендикулярні прямі, на кожній з них вибрано напрямок і вибрана одиниця виміру відрізків, то говорять, що задана *прямокутна система координат у просторі.*



Прямі називають осями координат, а їх спільну точку – початком *координат*. Вона позначається літерою O. Вісі координат позначають так: Ox, Oy, Oz. Їх називають: вісь абсцис, вісь ординат, вісь аплікат. Вся система позначається Oxyz.

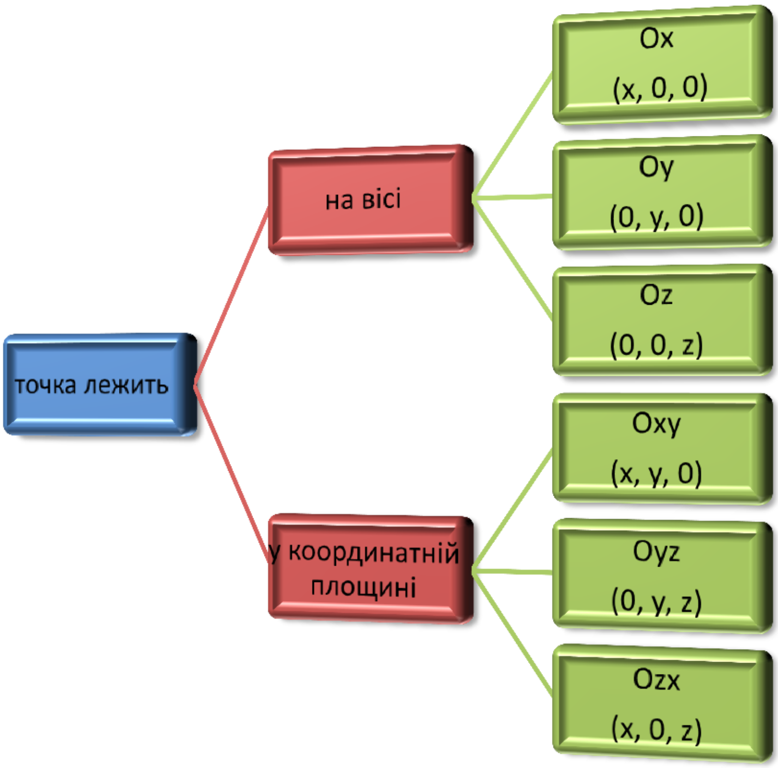
Три площини, що проходять відповідно через вісі координат Ox і Oy, Oy і Oz, Oz і Ox - координатні площини. Їх позначають Oxy, Oyz, Ozx.



Точка O поділяє кожну з осей координат на 2 променя, один з них – додатна піввісь, другий – від’ємна піввісь.

У прямокутній системі координат кожній точці M простору співставляється трійка чисел, які називаються її *координатами.*

Проведемо через точку М три площини, перпендикулярні до осей координат, і позначимо через M_1, M_2 і M_3, точки перетину цих площин відповідно з осями абсцис, ординат і аплікат. M_1– абсциса, M_2– ордината, M_3– апліката точки М. Координати точки М записуються: М (x; y; z), x – абсциса, y – ордината, z - апліката.



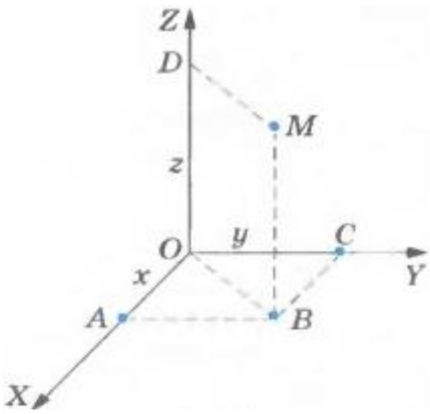
Щоб побудувати точку M(x, y, z) треба:

1) Візьмемо першу координату x і відмітимо її на вісі Ox (вліво і вниз, якщо $x > 0$; вправо і вверх, якщо $x < 0$). Позначимо цю точку A.

2) Через точку A проведемо пряму паралельну Oy і на цій прямій відкладемо відрізок (від точки A вправо, якщо $y > 0$, вліво, якщо $y < 0$) рівний числу y. Отримаємо відрізок AB.

3) Через точку B проведемо пряму паралельну осі Oz. На цій прямій відкладемо відрізок (від точки B вгору, якщо $z > 0$ або вниз, якщо $z < 0$) рівний числу z. Отримаємо відрізок BM.

4) Кінець відрізка BM і є точка M з заданими координатами.



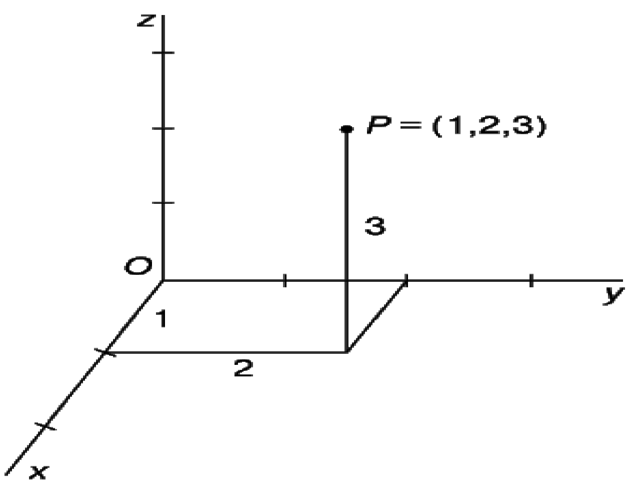
Приклад. Побудувати точку P(1, 2, 3).

1) На осі Ox відмітимо 1 одиничний відрізок (вліво і вниз). Через отриману точку проводимо пряму паралельну Oy.

2) На цій прямій відмітимо 2 одиничних відрізка (вправо).

3) Через отриману точку проводимо пряму паралельну Oz і на ній відкладемо відрізок (вверх) довжиною 3 одиничних відрізка.

4) Кінець даного відрізка і є точка P (1, 2, 3).



Контрольні питання

1. Як задати прямокутну систему координат у просторі?
2. Як називають вісі Ox, Oy, Oz.
3. Алгоритм побудови точки в просторі.

1.2 Умова колінеарності двох векторів. Поділ відрізка в заданому відношенні

1. Нехай ненульові вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні, $\bar{a} \parallel \bar{b}$, тобто існує таке число λ, що $\bar{a} = \lambda\bar{b}$. В координатній формі:

$$x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k} = \lambda\left(x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}\right) \Rightarrow x_1 = \lambda x_2,\, y_1 = \lambda y_2,\, z_1 = \lambda z_2 \Rightarrow$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Отже, умовою колінеарності двох векторів є пропорційність їх відповідних координат.

Приклад. Чи колінеарні вектори $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$ і $\bar{b} = -3\bar{i} - 6\bar{j} + 9\bar{k}$?

Розв'язання:

За умовою $\bar{a}$ *(1, 2, -3),* $\bar{b}$ *(-3, -6, 9)* а за формулою маємо $\frac{1}{-3} = \frac{2}{-6} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}$, або ще можна записати $\bar{a} = -\frac{1}{3}\bar{b} \Leftrightarrow \bar{b} = -3\bar{a}$.

2. Поділ підрізка в даному відношенні. Знайти координати, точки *M(x,y,z)*, яка ділить відрізок M_1M_2 в заданому відношенні λ (рис. 1), якщо відомі координати точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і $M_2(x_2,y_2,z_2)$, тобто: $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$

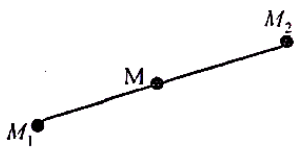


Рис. 1

Розглянемо вектори $\overline{M_1M} = \left(x - x_1, y - y_1, z - z_1\right)$, $\overline{MM_2} = \left(x_2 - x, y_2 - y, z - z\right)$. Оскільки $\overline{M_1M} \parallel \overline{MM_2}$ $\overline{M_1M} = \lambda\overline{MM_2}$ то згідно з умовою (1) колінеарності векторів маємо

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{z-z_1}{z_2-z}=\lambda \Rightarrow x-x_1=\lambda(x_2-x), y-y_1=\lambda(y_2-y)$$

$$z-z_1=\lambda(z_2-z) \Rightarrow$$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}; z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \quad (2)$$

Зокрема, якщо точка M ділить відрізок пополам, то $\lambda = 1$ і координати середини відрізка:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}; y=\frac{y_1+y_2}{2}; z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$