1.7 Методи інтегрування

Метод підстановки

Теорема. Якщо функція f(x) неперервна на деякому інтервалі (a, b), а x=φ(t) має неперервну похідну по t, причому область зміни функції x=φ(t) належить області визначення функції f(x), тоді виконується рівність

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt + C.(1)$$

Доведення. Покажемо, що ліва і права частини рівності (1) - це первісні для однієї функції відносно змінної t. Дійсно ліва частина (1) є складною функцією відносно t, тому похідна її по t дорівнює:.

$$\left(\int f(x)dx\right)'_t = \left(\int f(x)dx\right)'_x \cdot x'_t = \int (x) \cdot x'_t =$$
$$= \begin{bmatrix} за\ \ умовою \\ x = \varphi(t), \\ x'_t = \varphi'(t) \end{bmatrix} = f(\varphi(t)\varphi'(t)).$$

А похідна правої частини теж має такий самий вигляд

$$\left(\int f(\varphi(x))\varphi'(t)dt\right)'_t = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Первісні для однієї і тієї ж функції відрізняються на сталу величину C, що і стверджує рівність (1).

Метод інтегрування частинами

Теорема. Нехай функції U=U(x) і V=V(x) диференційовані на деякому інтервалі (a, b), тоді на (a, b) виконується рівність

$\int UdV = UV - \int VdU + C.$ (5.2)

Доведення. Із властивостей диференціала відомо:

$$d(uv) = udv + vdu \Rightarrow udv = d(uv) - vdu$$

Перейшовши до інтегралів, отримаємо рівність (5.2).

Приклад:

$$\int xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{vmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Індивідуальне домашнє завдання № 16

1. $\int 6x^2 dx$	1. $\int \cos 4x dx$	1. $\int x \ln x dx$.
2. $\int x^2 \sqrt{x} dx$	2. $\int \frac{x^2 - x}{2x-1} dx$	2. $\int \ln x dx$.
3. $\int \sqrt[3]{x} dx$	3. $\int \frac{4x dx}{2x^2+5}$	3. $\int x \mathrm{e}^{-x} dx$.
4. $\int \sqrt[3]{x^2} dx$	4. $\int \left(2\sin\frac{x}{2}+3\right) dx$	4. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$.
5. $\int (3x^2+2x-7) dx$	5. $\int \frac{arctgx}{\left(1+x^2\right)} \cdot dx$	5. $\int \mathrm{arctg} x dx$.
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$	6. $\int (\sin 2x) \cdot \frac{dx}{4}$	6. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$.
7. $\int \frac{e^{2x} dx}{e^x}$	7. $\int \frac{(\ln x)5}{x} dx$	7. $\int x^2 \sin 2x dx$.
8. $\int \frac{(2x^3 - x^2 + 5x) dx}{x^2}$	8. $\int \frac{(\ln 2t)^4}{t} dt$	8. $\int \mathrm{e}^x \cos x dx$.
9. $\int \frac{(4-x) dx}{2+\sqrt{x}}$	9. $\int \left(2\sin\frac{x}{2}+4\right) \cdot \cos\frac{x}{2} dx$	9. $\int x \ln x dx$.
10. $\int 6x^2 dx$	10. $\int \cos^3 x dx$	10. $\int \ln x dx$.
11. $\int x^2 \sqrt{x} dx$	11. $\int (3x-7)^6 dx$	11. $\int x \mathrm{e}^{-x} dx$.
12. $\int \sqrt[3]{x} dx$	12. $\int \sin x \cos^3 x dx$	12. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$.
13. $\int \sqrt[3]{x^2} dx$	13. $\int \cos 4x dx$	13. $\int \mathrm{arctg} x dx$.
14. $\int (3x^2+2x-7) dx$	14. $\int \frac{x^2 - x}{2x-1} dx$	14. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$.
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$	15. $\int \frac{4x dx}{2x^2+5}$	15. $\int x^2 \sin 2x dx$.
16. $\int \frac{e^{2x} dx}{e^x}$	16. $\int \left(2\sin\frac{x}{2}+3\right) dx$	16. $\int \mathrm{e}^x \cos x dx$.
17. $\int \frac{(2x^3 - x^2 + 5x) dx}{x^2}$	17. $\int \frac{arctgx}{\left(1+x^2\right)} \cdot dx$	17. $\int x \ln x dx$.
18. $\int \frac{(4-x) dx}{2+\sqrt{x}}$	18. $\int (\sin 2x) \cdot \frac{dx}{4}$	18. $\int \ln x dx$.
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$	19. $\int \frac{(\ln x)5}{x} dx$	19. $\int x \mathrm{e}^{-x} dx$.
20. $\int \frac{e^{2x} dx}{e^x}$	20. $\int \frac{(\ln 2t)^4}{t} dt$	20. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$.

Зразок розв’язання ІДЗ № 16

1. $\int xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{vmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$

2.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{e^x+1} = t, e^x = t^2 - 1. \\ e^x dx = 2tdt \Rightarrow dx = \dfrac{2tdt}{t^2-1} \end{array} \right] = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{2tdt}{t^2-1} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}-1}\right| + C.$$

Пример 3.

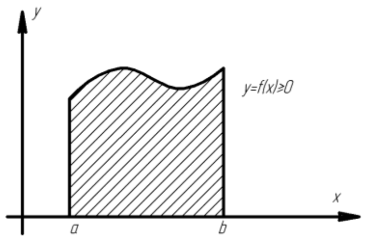
$$\int \frac{x^2\,dx}{4+3x^3} = \frac{1}{9}\int \frac{d\,(4+3x^3)}{4+3x^3} = \frac{1}{9}\ln|4+3x^3| + C.$$

4.11 – 4.12 Застосування визначеного інтегралу

Площа фігури в прямокутних координатах

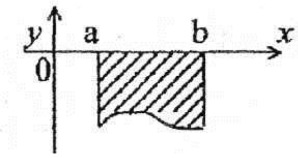
1.

$y = f(x) \geq 0$



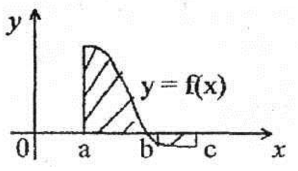
$$S = \int_a^b f(x)dx. \quad (a < b).$$

2. $y = f(x) \leq 0$



$$S = -\int_a^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx. \quad (a < b)$$

3. $y = f(x)$

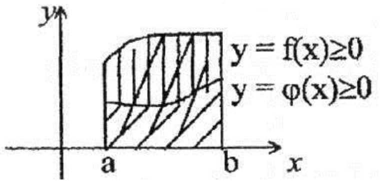


Площа, обмежена кривою y = f(x) та віссю OX.

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_b^c f(x)dx=\int_c^b |f(x)|dx+\int_b^c (-f(x))dx \Rightarrow$$

$$S=\int_a^b |f(x)|dx \ , \qquad (a<b).$$

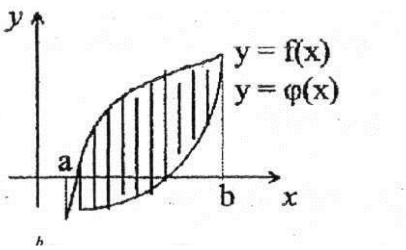
4.



$$S=\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]dx. \ \ 0\le\varphi(x)\le f(x), \ \ (a<b).$$

5.

$y=f(x)$
$y=\varphi(x)$



$$S=\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]dx. \ \ \varphi(x)\le f(x),$$

знаки їх довільні (a < b).

Індивідуальне домашнє завдання № 17

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = ax^2 + bx + c$ *і* $y = kx + \beta$.

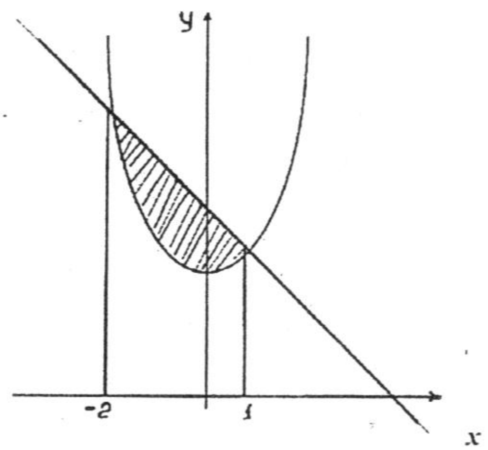
№ п/п	***a***	***b***	***c***	***k***	***β***
1	-2	4	11	2	7
2	-1	2	4	2	2
3	2	4	3	2	15
4	2	-4	5	-2	17
5	-1	-6	3	2	13
6	-1	2	9	2	5
7	-1	2	11	1	9
8	1	2	3	-1	7
9	1	-4	5	-1	5
10	-1	6	5	-1	15
11	3	-6	5	6	5
12	1	-2	2	1	2
13	-1	-2	12	-2	8
14	3	-6	2	3	4
15	2	-4	3	-4	11
16	2	12	19	2	11
17	1	2	4	-1	4
18	-1	-6	9	1	10
19	1	-2	3	2	3
20	-1	-6	5	-2	5

Зразок розв'язання ІДЗ № 17

Обчислити площу фігури, обмежену параболою y = x² + 2 і прямою x + y = 3

Розв'язання:

1) Будуємо графіки функцій y = x² + 2 і x + y = 3



2) Знайдемо границі інтегрування, розв'язавши систему $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$,

x + x² + 1 = 3; *x² + x – 2 = 0;* $x_1 = -2, x_2 = 1$

3) S = $\int_{-2}^{1}(3 - x - (x^2 + 1))dx = \int_{-2}^{1}(3 - x - x^2 - 1)dx = \int_{-2}^{1}(2 - x^2 - x)dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{1} =$

$= 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - (2(-2) - \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2}) = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + 2 = \frac{9}{2}$ (кв. од.).