**Індивідуальне домашнє завдання № 6**

| | Знайти обернену матрицю для матриці А | Розв’язати рівняння |
|---|---|---|
| 1 | $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 5\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$ |
| 2 | $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$ | $X\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 5\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ |
| 3 | $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ -10 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},$ | $X\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ |
| 4 | $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}7 & 2 & 0\\ -7 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ |
| 5 | $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ 10 & 4 & 1\\ 7 & 3 & 2\end{pmatrix},$ | $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ |
| 6 | $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}2 & -2\\ -4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ |
| 7 | $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ |
| 8 | $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & -5\\ 4 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ | $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ |
| 9 | $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 10 | $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 0\\ -1 & 4 & 2\end{pmatrix}$ | $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ |
| 11 | $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -2 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ |
| 12 | $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 2\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 5\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$ |
| 13 | $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 4 & -1\end{pmatrix}$ | $X\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 5\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ |
| 14 | $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}2 & -2\\ -4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ |
| 15 | $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 0\\ 4 & -3 & 0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ |
| 16 | $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}3 & 7\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ |
| 17 | $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ | $X\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ |
| 18 | $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ -1 & 0 & 2\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 5\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ |
| 19 | $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix}$ | $X\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ |
| 20 | $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 0\\ -1 & 1 & 3\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-5 & 6\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ |

## Зразок розв’язання ІДЗ №6

**Приклад 1.** Знайти обернену матрицю до даної :

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix}$$

Розв’язання:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 7 & 1\end{vmatrix}=-3+28+0-(18+0-14)=21$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 7 & 1\end{vmatrix}=3-14=-11$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-(2-6)=4$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 7\end{vmatrix}=14-9=5$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 2\\ 7 & 1\end{vmatrix}=-(0-14)=14$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-1-6=-7$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 3 & 7\end{vmatrix}=-(-7-0)=7$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=0-6=-6$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-(-2-4)=6$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-3-0=-3$$

$$A^{-1}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}-11 & 14 & -6\\ 4 & -7 & 6\\ 5 & 7 & -3\end{pmatrix}$$

***Приклад 2.*** Розв’язати рівняння

$$\begin{pmatrix}2 & -2 & -3\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Розв’язання: Це рівняння виду $A \cdot X = B$, розв’язок якого $X = A^{-1} \cdot B$.

Знайдемо матрицю $A^{-1}$:

1. $\det A=\begin{vmatrix}2 & -2 & -3\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -8 & -3\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-8 & -3\\ 4 & 1\end{vmatrix}=$

$= -(-8 + 12) = -4 \neq 0$, отже матриця $A^{-1}$ існує.

2. Складемо матрицю $A^*$:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -10 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8$

$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 9 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8$

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -10 & 2 & -8 \\ 9 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -10 & 9 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix}.$ 4. $A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -10 & 9 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix}.$

Знайдемо матрицю X:

$$X = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -10 & 9 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3-20+9 \\ -1+4-3 \\ 4-16+8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Відповідь. X =** $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$**.**

**2.4 Розв'язання систем трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими методом Крамера.**

## Системи лінійних рівнянь

В загальному вигляді система лінійних рівнянь (СЛР) m з n невідомими записується так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (*)$$

де $a_{11},\ldots,a_{mn}$ - дійсні числа, які називаються коефіцієнтами системи;

$x_1,\ldots,x_n$ – невідомі;

$b_1,\ldots,b_m$ - дійсні числа, які називаються вільними членами.

Розв’язком СЛР (*) називається упорядкована n-ка елементів, що задовольняє кожне рівняння цієї системи.

СЛР (*) може мати:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\,\textit{Єдиний розв'язок}; \\ 2.\,\textit{Безліч розв'язків}; \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \left.\right\} \textit{сумісна визначена СЛР} \\ \left.\right\} \textit{сумісна невизначена СЛР} \end{array}$$

$$3.\,\textit{Не мати жодного розв'язку.} \quad \left.\right\} \textit{несумісна СЛР}$$

Розв’язати СЛР – це значить знайти всі її розв’язки, або довести, що розв’язків не має.

В математиці вивчають різні способи точних і наближених розв’язувань СЛР:

1. Метод Крамера (за допомогою визначників);
2. Метод послідовного виключення змінних – метод Гаусса;
3. В матричній формі (за допомогою обернених матриць).

## Метод Крамера

Нехай задано систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Головним її визначником $\Delta$ називається визначник $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

а допоміжними визначниками $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ називаються визначники, які одержують із головного заміною відповідно першого, другого або третього стовпця стовпцем вільних членів, тобто

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Розв'язок системи трьох лінійних рівнянь знаходиться за допомогою формул Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$$

Можливі випадки:

1. Якщо $\Delta \neq 0$, то система сумісна і визначена.

2. Якщо $\Delta = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$, то система сумісна, але невизначена.

3. Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один з допоміжних визначників не дорівнює нулю, то система несумісна.

# Індивідуальне домашнє завдання № 7.

Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

методом Крамера.

| **№ завдання** | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $в_1$ | $в_2$ | $в_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***1*** | 1 | -2 | 2 | 2 | 1 | -1 | 7 | 1 | -1 | -5 | 5 | 10 |
| ***2*** | 1 | -2 | 4 | 2 | -1 | 3 | 4 | 1 | -5 | 6 | 11 | 9 |
| ***3*** | 1 | 2 | -3 | 2 | -1 | 3 | 3 | 2 | -5 | 9 | 13 | -1 |
| ***4*** | 1 | 2 | -1 | 2 | -1 | 1 | 3 | -5 | 2 | 7 | 2 | -7 |
| ***5*** | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | 4 | -2 | 5 | 13 | 16 | 5 |
| ***6*** | 2 | -3 | 1 | 2 | 1 | -4 | 6 | -5 | 2 | 2 | 9 | 17 |
| ***7*** | 2 | 1 | -3 | 1 | -3 | 2 | 3 | -4 | -1 | -1 | 10 | 5 |
| ***8*** | 10 | 1 | 4 | 1 | -2 | -7 | 2 | 1 | 5 | 1 | -3 | 0 |
| ***9*** | 5 | -3 | 2 | 4 | 5 | -3 | 3 | 7 | -4 | 19 | 31 | 31 |
| ***10*** | 2 | -1 | 2 | 1 | 2 | -1 | 3 | 1 | -3 | -3 | 4 | 3 |
| ***11*** | 4 | 1 | -2 | -1 | 3 | -1 | 3 | -1 | 5 | 10 | -1 | 1 |
| ***12*** | 4 | -1 | -5 | 1 | 1 | -2 | 3 | -2 | -6 | 1 | 6 | -2 |
| ***13*** | 3 | 4 | 2 | 5 | -6 | -4 | -4 | 5 | 3 | 5 | -3 | 1 |
| ***14*** | 3 | -2 | 1 | 5 | 1 | -2 | 1 | 1 | 1 | -3 | 11 | 1 |
| ***15*** | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 3 | 2 | 14 | 12 | 11 |
| ***16*** | 2 | -3 | 1 | 1 | 5 | -1 | 3 | 1 | 4 | -3 | -1 | 11 |
| ***17*** | 5 | 1 | -2 | 10 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 5 | 0 | -11 |
| ***18*** | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 5 | 4 | 7 | 8 |
| ***19*** | 2 | -1 | 3 | 1 | 2 | -1 | -1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 4 |
| ***20*** | 2 | 1 | -2 | 1 | -1 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 |

## Зразок розв'язання ІДЗ № 7

Розв'язати СЛР методом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 9 - 1 - 2 - 3 = -7$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 27 - 2 - 6 - 6 - 12 = -7$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 12 - 3 + 2 - 4 - 18 = -7$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 6 + 4 + 8 - 9 - 4 = -7$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1$$

$$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1$$

Перевірка

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 1 = 4, \\ 1 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 2, \\ 1 + 1 + 1 = 3. \end{cases}$$

Відповідь: (1;1; 1).