ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Диференціальні рівняння

Якщо невідома функція є функція однієї незалежної змінної, то диференціальне рівняння називають *звичайним*	Якщо невідома функція є функцією двох і більше змінних, то диференціальне рівняння називають *рівнянням із частинними похідними*.

Диференціальні рівняння n – го порядку

Звичайним диференціальним рівнянням n – го порядку відносно функції $y = f(x)$ називають співвідношення, що зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = f(x)$ і її похідні $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Порядком диференціального рівняння називають порядок найвищої похідної, що входить у рівняння.

Розв'язком або інтегралом диференціального рівняння, називають будь-яку неперервно диференційовану функцію, підстановка якої до рівняння перетворює його на тотожність.

Розв'язок, що містить довільну сталу, називають *загальним розв'язком.*

Кожний розв'язок, утворений із загального, якщо надати сталій C визначене числове значення, називають *частинним розв'язком*.

Диференціальні рівняння 1 – го порядку

Звичайним диференціальним рівнянням першого порядку відносно функції $y = f(x)$ називають співвідношення, яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = f(x)$ і її першу похідну, тобто співвідношення вигляду

$$F(x, y, y') = 0$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називають функцію

$$y = \varphi(x, C)$$

Частинним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називають будь-яку функцію $y = \varphi(x, C_0)$, утворену із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$, якщо в останньому довільній сталій C надати конкретне значення $C = C_0$.

Диференціальні рівняння 1 – го порядку

Вид рівняння	Метод розв'язання
Рівняння з відокремлюваними змінними	
$y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$	відокремити змінні
$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$	

схема розв'язання ДР з відокремленими змінними

1. Розкладаємо функцію $f(x, y)$ на множники $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$
2. Замінюємо похідну відношенням диференціалів $y' = \frac{dy}{dx}$, тоді $\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$.
3. Розділимо (відокремимо) змінні так, щоб при dy був вираз відносно y, а при dx – вираз відносно x, тобто $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$, $(f_2(y) \neq 0)$.
4. Інтегруємо кожну з частин по відповідних змінних $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$.

Отримаємо загальний інтеграл $F_2(y) = F_1(x) + C$.

Вид рівняння	Метод розв'язання
Однорідні рівняння	
$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$;	використати підстановку $\frac{y}{x} = t \Rightarrow y = xt$, $y' = t'x + t$
$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, де P і Q – однорідні функції одного порядку	
$y' = f(x, y)$, де $f(x, y)$ – однорідна функція нульового порядку.	
Лінійні рівняння	
$y' + p(x)y = q(x)$	використати підстановку $y = uv$ $y' = u'v + uv'$

схема розв'язання лінійного ДР першого порядку

1. Робимо заміну $y = uv$. Знаходимо $y' = u'v + uv'$.
2. Підставляємо вирази для y і y' в рівняння, отримаємо: $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$.
3. Групуємо другий і третій доданки $u'v + (uv' + p(x)uv) = q(x)$; $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$.
4. Підберемо v так, щоб вираз в дужках дорівнював нулю, тобто $v' + p(x)v = 0. \frac{dv}{dx} = -p(x)v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx$ при цьому вважаємо, що $C = 0$. Отримаємо $\ln v = e^{-\int p(x)dx}$.
5. Знайдене підставимо в рівняння, маємо $u'e^{-\int p(x)dx} = q(x)| \times e^{\int p(x)dx}$; $u' = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow u = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + C$.
6. Знайдені $u = u(x)$ і $v = v(x)$ підставимо в $y = uv$.

ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

$z = f(x, y)$ – функція незалежних змінних x та y, якщо кожній парі (x, y) із деякої області D за яким-небудь правилом або законом ставиться у відповідність певне значення z.

Область визначення функції $z = f(x, y)$ – це сукупність пар (x, y), при яких z існує (визначена).

ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ФУНКЦІЇ $z = f(x, y)$

Похідні першого порядку

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$y = const.$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y,) - f(x, y)}{\Delta y}$$

$x = const.$

Похідні другого порядку

$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ $z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

Повний диференціал функції $z = f(x, y)$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

частинні диференціали

Застосування повного диференціалу до наближених обчислень

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$$

ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Схема дослідження функції $z = f(x, y)$ на екстремум

1. Знайти область визначення функції.

2. Знайти z'_x; z'_y.

3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0; \end{cases}$ та знайти критичні точки функції.

4. Знайти значення других похідних в критичних точках,

використовуючи такі позначення:

$A = z''_{xx}(M_0)$, $B = z''_{xy}(M_0)$, $C = z''_{yy}(M_0)$.

5. Обчислити для кожної критичної точки $\Delta = AC - B^2$.

6. На основі достатньої умови існування екстремуму зробити висновок

про наявність екстремуму у критичних точках:

а) мінімум, якщо $\Delta > 0$ і $A > 0$;

б) максимум, якщо $\Delta > 0$ і $A < 0$;

в) немає екстремуму, якщо $\Delta < 0$;

г) необхідні додаткові дослідження, якщо $\Delta = 0$.

7. Знайти екстремальні значення функції.

ГРАНИЦІ

Основні теореми про границі

1. $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$

2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

5. $\lim\limits_{x\to x_0} kf(x) = k\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Визначні границі

Перша визначна границя	Друга визначна границя
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$

Основні положення теорії границь

$\dfrac{\text{число}}{\infty} = 0,\quad \dfrac{\text{число}}{0} = \infty,\quad \dfrac{0}{\text{число}} = 0,\quad \dfrac{\infty}{\text{число}} = \infty,\quad a^{\infty} = \begin{cases}\infty, \text{якщо } a > 1,\\ 0, \text{якщо } 0 < a < 1.\end{cases}$

Основні види невизначеностей та правила їх розкриття

Невизначеність вигляду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Правило розкриття:
чисельник і знаменник дробу розділити на змінну у самому великому степені.
Зокрема:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m} = \begin{cases}\infty, \text{якщо } n > m,\\ 0, \text{якщо } n < m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, \text{якщо } n = m.\end{cases}$$

Невизначеність вигляду $[1^{\infty}]$

Правило розкриття:
використати другу визначну границю.

Невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$

Правило розкриття:
при $x \to x_0$ чисельник і знаменник дробу скоротити на $x - x_0$.
Зокрема:

✓ якщо в чисельнику і знаменнику присутні тригонометричні і обернені тригонометричні функції, то необхідно застосувати першу визначну границю та наслідки з неї;

✓ якщо вираз містить корні, то чисельник і знаменник дробу множать на вираз спряжений до кореня.

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ, ТОЧКИ РОЗРИВУ

Функція $y = f(x)$ – неперервна в точці x_0, якщо:
1. Функція визначена в точці x_0, $x_0 \in D(y)$.
2. Існує границя функції в точці x_0, при цьому права і ліва границі рівні:
$$\lim_{x\to x_{0+0}} f(x) = \lim_{x\to x_{0-0}} f(x)$$
3. Границя функції в точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

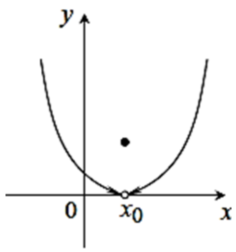
Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то функція називається розривною в точці x_0, а точка x_0 – називається точкою розриву.

Класифікація точок розриву

Точки розриву I роду

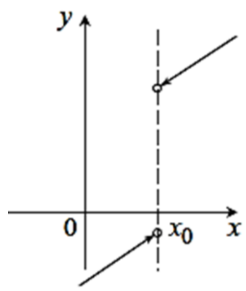
точки усувного розриву

$$\lim_{x\to x_{0+0}} f(x) = \lim_{x\to x_{0-0}} f(x) \neq f(x_0)$$



точки кінцевого розриву

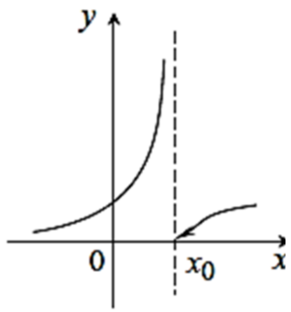
$$\lim_{x\to x_{0+0}} f(x) \neq \lim_{x\to x_{0-0}} f(x)$$



Точки розриву II роду

точки нескінченого розриву

$$\lim_{x\to x_{0\pm 0}} f(x) = \pm\infty$$



НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

визначення

Сукупність $F(x)+C$ всіх первісних функції $f(x)$ на множині X називається невизначеним інтегралом:

$\int f(x)dx = F(x)+C$, — $f(x)$ – підінтегральна функція

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз — x – змінна інтегрування

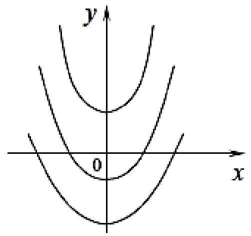
C – постійна інтегрування — $F(x)$ – первісна $f(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)\right)' dx = f(x)$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
3. $\int dF(x) = F(x)+C$
4. $\int a\cdot f(x)dx = a\int f(x)dx,\ a=const\neq 0$
5. $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
6. $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$

Геометричне уявлення

$y=F(x)+C$ – сім'я інтегральних кривих



Методи інтегрування

1. Заміна змінної

$$\int f(x)dx = \int f\,\underbrace{(\varphi(t))}_{x}\,\underbrace{\varphi'(t)dt}_{dx}$$

2. Інтегрування частинами

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Таблиця інтегралів

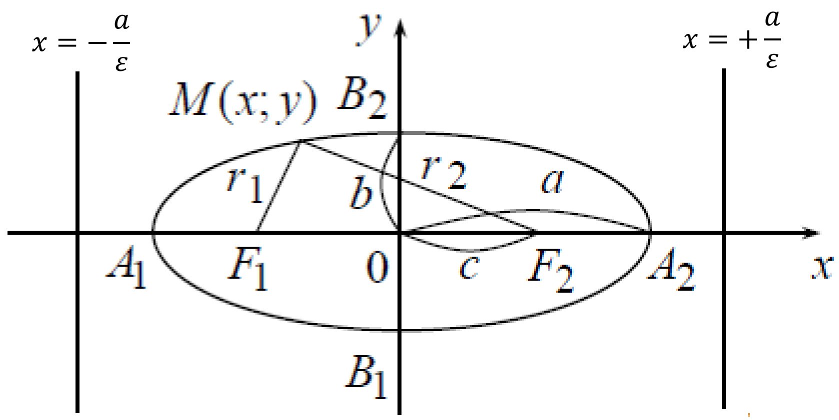
1. $\int dx = x + C;$	2. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \alpha\neq -1;$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}+C;$	4. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C;$
5. $\int e^{x}\,dx = e^{x}+C;$	6. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a}+C;$
7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$	8. $\int \cos x\,dx = \sin x + C;$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$	10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
11. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C;$	12. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C;$
13. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C;$	14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C;$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C;$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm p}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm p}\right\rvert + C,$ $(p=const)$

Інтегрування частинами

Вигляд інтеграла	u	dv
$\int P_n(x)e^{ax}dx$	$P_n(x)$	$e^{ax}dx$
$\int P_n(x)a^{ax}dx$	$P_n(x)$	$a^{ax}dx$
$\int P_n(x)cosbxdx$	$P_n(x)$	$cosbxdx$
$\int P_n(x)sinbxdx$ $P_n(x)$ - многочлен	$P_n(x)$	$sinbxdx$
$\int P_n(x)lnxdx$	lnx	$P_n(x)dx$
$\int P_n(x)arccosbxdx$	$arccosbx$	$P_n(x)dx$
$\int P_n(x)arcsinbxdx$	$arcsinbx$	$P_n(x)dx$
$\int P_n(x)arctgbxdx$	$arctgbx$	$P_n(x)dx$
$\int P_n(x)arcctgbxdx$	$arcctgbx$	$P_n(x)dx$
$\int e^{ax}cosbxdx$	Метод інтегрування частинами застосувати двічі; обидва рази в якості u взяти функцію одного і того ж типу (або показникову, або тригонометричну). Отримане рівняння розв'язати відносно шуканого інтегралу.	
$\int a^{ax}cosbxdx$		
$\int e^{ax}sinbxdx$		
$\int a^{ax}sinbxdx$		
$\int coslnxdx$		
$\int sinlnxdx$		

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

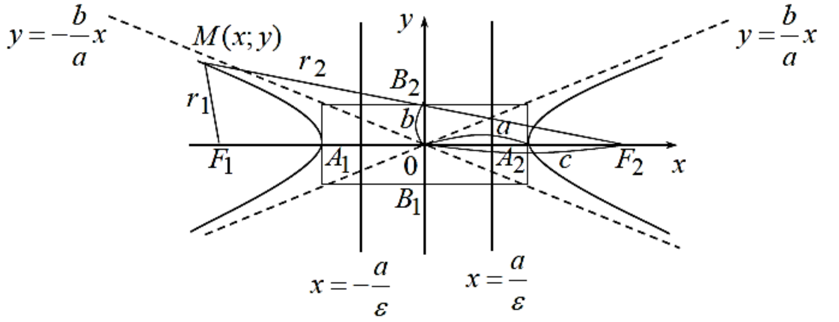
Еліпс



Рівняння	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Зв'язок між a, b, c	$b^2 = a^2 - c^2$
Вершини еліпса	$A_1(-a;0), A_2(a;0), B_1(0;-b), B_2(0;b)$
Велика вісь	$\lvert A_1A_2\rvert = 2a$
Мала вісь	$\lvert B_1B_2\rvert = 2b$
Фокуси	$F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$
Фокусна відстань	$\lvert C_1C_2\rvert = 2c$
Ексцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$
Директриси	$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$

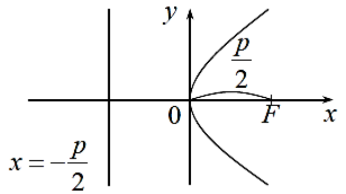
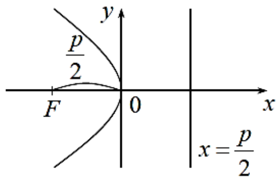
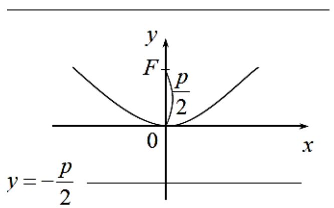
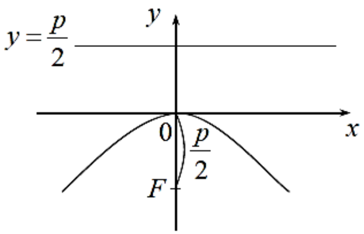
КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Гіпербола



Рівняння	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Зв'язок між a, b, c	$b^2 = c^2 - a^2$
Вершини еліпса	$A_1(-a;0), A_2(a;0)$
Дійсна вісь	$\lvert A_1A_2\rvert = 2a$
Уявна вісь	$\lvert B_1B_2\rvert = 2b$
Фокуси	$F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$
Фокусна відстань	$\lvert C_1C_2\rvert = 2c$
Ексцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$
Директриси	$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$
Асимптоти	$y = \pm\frac{b}{a}x$
Спряжена гіпербола	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

<table>
<tr><th colspan="3">Парабола</th></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>Рівняння</td><td>$y^2 = 2px$</td></tr>
<tr><td>Фокус</td><td>$F\left(\frac{p}{2};0\right)$</td></tr>
<tr><td>Директриса</td><td>$x = -\frac{p}{2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>Рівняння</td><td>$y^2 = -2px$</td></tr>
<tr><td>Фокус</td><td>$F\left(-\frac{p}{2};0\right)$</td></tr>
<tr><td>Директриса</td><td>$x = \frac{p}{2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>Рівняння</td><td>$x^2 = 2py$</td></tr>
<tr><td>Фокус</td><td>$F\left(0;\frac{p}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td>Директриса</td><td>$y = -\frac{p}{2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>Рівняння</td><td>$x^2 = -2py$</td></tr>
<tr><td>Фокус</td><td>$F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td>Директриса</td><td>$y = \frac{p}{2}$</td></tr>
</table>

МАТРИЦІ

Матрицею називають таблицю упорядкованих чисел або будь-яких інших об'єктів a_{ij}, $i = 1, \overline{m}$, $j = 1, \overline{n}$ розташованих в m-рядках та n-стовбцях.

$$A_{m\times n}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \|a_{ij}\|$$

a_{ij} – елементи матриці

i – номер рядка

j – номер стовпця

$m \neq n$, A – прямокутна матриця

$m = n$, A – квадратна матриця

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A, B - \text{однакової розмірності} \\ a_{ij} = b_{ij} \end{cases}$$

Види матриць

Матриця – рядок
$A = (a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n})$

Матриця – стовпець

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

Нульова матриця

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Діагональна матриця

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Одинична матриця

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ОПЕРАЦІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

Сума матриць

$$A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = \|a_{ij}\| + \|b_{ij}\| = \|c_{ij}\| = C_{m\times n}$$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{pmatrix}$$

Властивості

$A + B = B + A$ $\quad$ $(A + B) + C = A + (B + C)$ $\quad$ $A + 0 = A$

Множення матриці на число

$$\alpha A = \alpha\|a_{ij}\| = \|\alpha a_{ij}\|$$

$$\alpha\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$$

Властивості

$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ $\quad$ $\alpha\beta A = (\alpha\beta)A$ $\quad$ $(A + B)\alpha = \alpha A + \alpha B$ $\quad$ $A \cdot 0 = 0$

Транспонування матриць

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^T_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Властивості

$(A^T)^T = A$ $\quad$ $(A + B)^T = A^T + B^T$ $\quad$ $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

Множення матриць

$A_{m\times n} \cdot B_{n\times k} = C_{m\times k}$ (\«ширина» матриці = «висоті» матриці)

$$c_{ij} = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Властивості

$A \cdot B \neq B \cdot A$ $\quad$ $A \cdot E = E \cdot A$ $\quad$ $(AB)^T = B^T + A^T$

$(A \cdot B)C = A(B \cdot C)$ $\quad$ $(A + B)C = AC + BC$ $\quad$ $A(B + C) = AB + AC$

$\alpha(A \cdot B) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Піднесення до степеня

A – квадратна матриця

$$A^m = \underbrace{AA \dots A}_{m-\text{разів}}$$

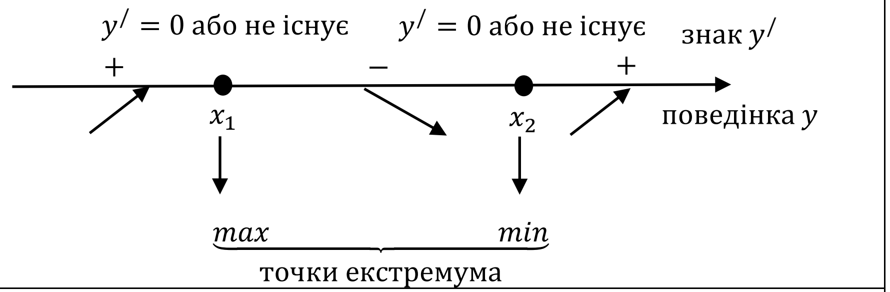
Властивості

$A^0 = E$ $\quad$ $A^1 = A$ $\quad$ $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$ $\quad$ $(A^m)^k = A^{m\cdot k}$

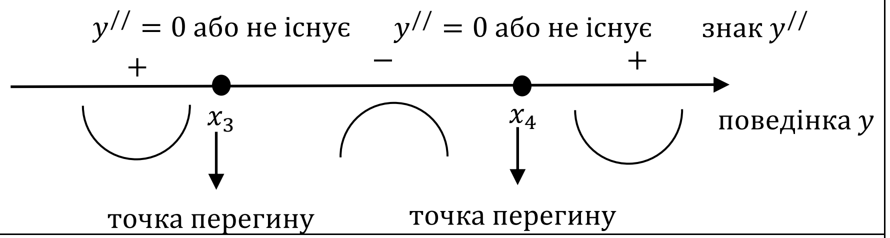
ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

Дослідження функції

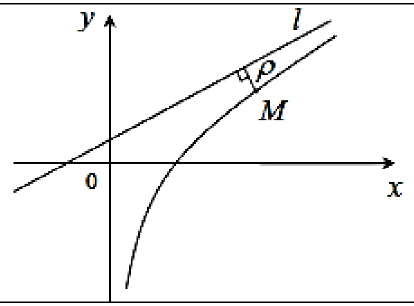
зростання (спадання) та екстремуми



випуклість (угнутість) та точки перегину



асимптоти

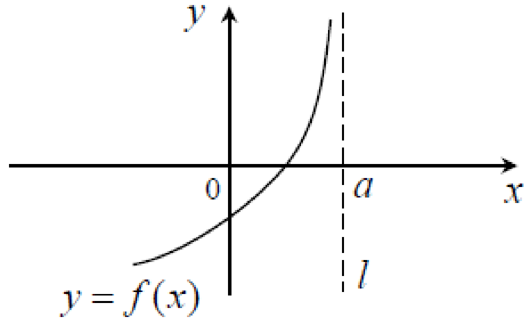


Пряма l називається асимптотою кривої, якщо відстань від змінної точки M кривої до прямої l прямує до нуля при віддалені точки M у нескінченність.

$\rho \to 0$ при $M \to \infty$

Види асимптот

вертикальні

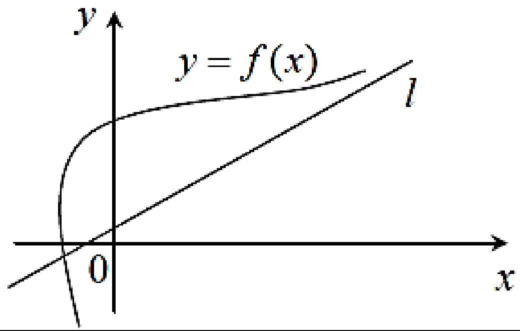


l: $x = a$ – вертикальна асимптота, якщо

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$$

похилі

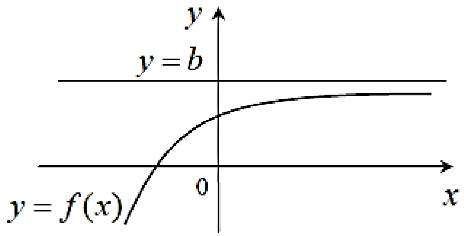


l: $y = kx + b$ – похила асимптота, якщо існує

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$$

горизонтальні



l: $x = b$ – горизонтальна асимптота, якщо $k = 0$

ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Таблиця похідних

Правила диференціювання	Похідні елементарних функцій
$C' = 0$	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
$x' = 1$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(Cu)' = C(u)'$	$(e^x)' = e^x$
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
	$(\sin x)' = \cos x$
	$(\cos x)' = -\sin x$
	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Похідні складної функції

$$y'_x = (f[\varphi(x)])' = f'(u) \cdot \varphi'(x) \text{ або } y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$(e^u)' = e^u \cdot u'$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\ln u)' = \frac{1\cdot}{u} u'$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\log_a u)' = \frac{1\cdot}{u \cdot \ln a} u'$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Диференціал функції

Диференціал функції – це головна частина приросту функції $y = f(x)$ лінійна відносно $\Delta \boldsymbol{x}$:

$$dy = y' \Delta x$$

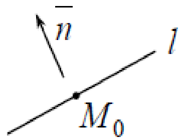
Якщо $y = x$, то $dx = \Delta x$.

Формула для наближеного знаходження функції за допомогою диференціала.

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

Рівняння прямої, що проходить через точку перпендикулярно вектору



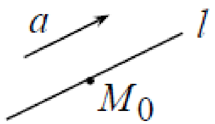
$\overline{n} = (A; B)$, $M_0(x_0; y_0)$, $\overline{n} \perp l$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Загальне рівняння прямої

$$Ax + By + C = 0, \overline{n} = (A; B)$$

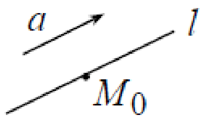
Канонічне рівняння прямої



$\overline{a} = (p; q)$, $M_0(x_0; y_0)$, $\overline{a} \parallel l$

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}$$

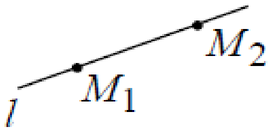
Параметричне рівняння прямої



$x = x_0 + pt,$ $\quad M_0(x_0; y_0)$

$y = y_0 + qt,$ $\quad \overline{a} = (p; q)$

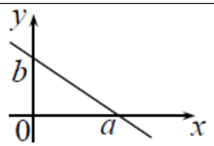
Рівняння прямої, що проходить через дві точки



$M_1(x_1; y_1)$, $\quad M_2(x_2; y_2)$

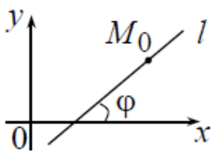
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Рівняння прямої у відрізках



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Рівняння прямої, що проходить через точку та з заданим кутовим коефіцієнтом



$M_0(x_0; y_0)$, $\quad k = \operatorname{tg} \varphi$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

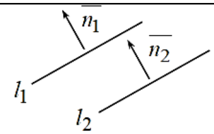
ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

Взаємне розташування прямих на площині

Дано: $l_1\colon\ A_1x + B_1y + C_1 = 0, \overline{n} = (A_1; B_1), k = -\frac{A_1}{B_1}$

$l_2\colon\ A_2x + B_2y + C_2 = 0, \overline{n} = (A_2; B_2), k = -\frac{A_2}{B_2}$

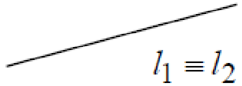
Умова паралельності прямих



$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

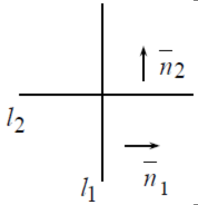
$$k_1 = k_2$$

Умова співпадання прямих



$$l_1 \equiv l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

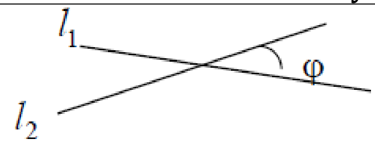
Умова перпендикулярності прямих



$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 \perp \overline{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

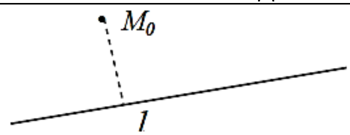
Кут між прямими



$$\cos \varphi = \pm \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

Відстань від точки до прямої



$l\colon\ Ax + By + C = 0, M_0(x_0; y_0)$

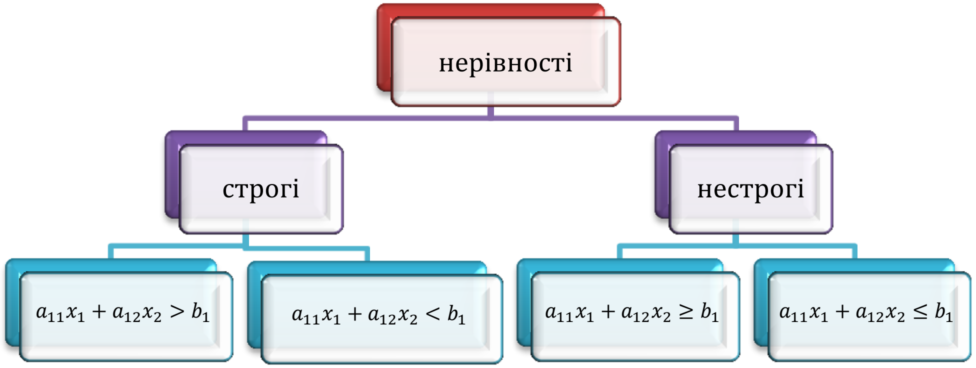
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ЛІНІЙНІ НЕРІВНОСТІ

лінійні нерівності

Нерівність являється *лінійною*, якщо вона містить змінні тільки у першому степеню і не містить добутку змінних.

Типи нерівностей



де $x_1, \dots, x_n$ – *невідомі*, a_{ij} – дійсні числа, які називаються *коефіцієнтами при невідомих* системи; b_k – вільні члени $i, k = \overline{1, m}, j = \overline{1,\ n}$.

Розв'язком нерівності називають пару чисел $(\alpha_1;\ \alpha_2)$, що задовольняє цю нерівність. Геометрично множина розв'язків нерівності зображується у вигляді півплощини, що обмежена прямою $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$, яка називається *граничною прямою*.

алгоритм

1. Замінюємо у нерівності $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 > b_1$знак нерівності на знак дорівнює $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$. Отримаємо граничну пряму, яку і побудуємо (пунктиром, якщо нерівність строга, суцільною лінією, якщо нерівність нестрога) на координатній площині. Пряма розіб'є площину на дві півплощини.

2. Вибираємо будь-яку з півплощин і розглядаємо в ній довільну точку. У багатьох випадках, якщо це можливо вибираємо точку $O(0; 0)$. Підставляють координати даної точки у нерівність і перевіряють виконання нерівності. Якщо у результаті перевірки отримуємо вірну числову нерівність, то робимо висновок, що нерівність виконується у всій області, якій належить вибрана точка. Якщо в результаті перевірки отримаємо невірну нерівність, то множиною розв'язків буде друга півплощина, якій вибрана точка не належить.

3. Якщо нерівність строга, то границі області (тобто гранична пряма) не включають в множину розв'язків, якщо нестрога – то включають.

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

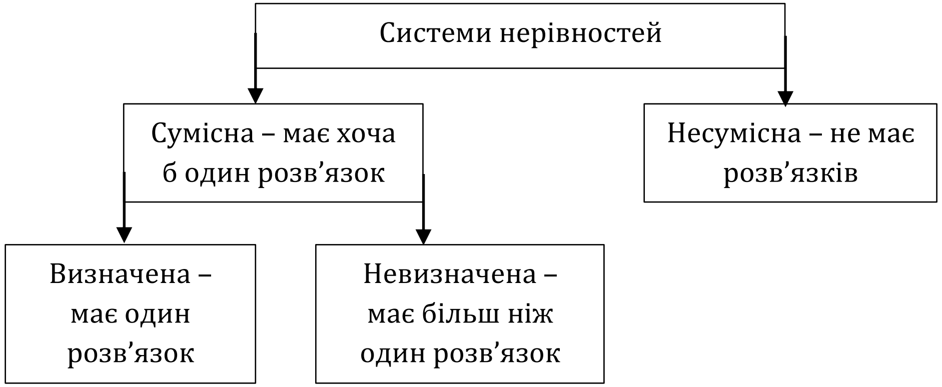
Система лінійних нерівностей – це система, що складена із декількох нерівностей або система вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \geq b_m \end{cases}$$

де $x_1,\ x_2$ – *невідомі*, a_{ij} – *коефіцієнти при невідомих* системи; $b_1, b_2, \dots, b_m$ – вільні члени $i = 1, \dots, m;\ j = 1, 2$.

Розв'язком системи нерівностей називають впорядковану пару чисел $(\alpha_1,\ \alpha_2)$, підстановка яких у систему замість невідомих $(x_1,\ x_2)$, перетворює кожне нерівність системи у вірну нерівність.

Геометричним розв'язком системи або областю допустимих розвязків (ОДР) лінійних нерівностей є множина точок, що задовольняє всім нерівностям системи, тобто, спільна частина (перетин) отриманих півплощин.



СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Системі лінійних рівнянь (СЛР)

Система m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

де $x_1, \dots, x_n$ – *невідомі*, a_{ij} – дійсні числа, які називаються *коефіцієнтами при невідомих* системи (індекс i вказує номер рівняння, j – номер невідомого, при якому записано цей коефіцієнт); b_k – вільні члени $i, k = \overline{1, m}, j = \overline{1,\ n}$.

$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ – розв'язок системи, тобто набір чисел, при підстановці яких в систему кожне рівняння системи перетворюється в вірну рівність.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$ – однорідна система.

Системи рівнянь

- Сумісна – має хоча б один розв'язок
  - Визначена – має один розв'язок
  - Невизначена – має більш ніж один розв'язок
- Несумісна – не має розв'язків

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Методи розв'язку систем лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Формули Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \qquad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Метод оберненої матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
матриця системи

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$
матриця вільних членів

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
матриця невідомих

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$ – обернена матриця, де Δ - визначник матриці;

A_{ij} - алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A.

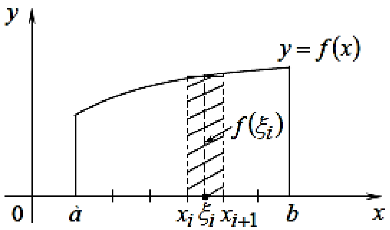
Метод Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad a_{42}x_2 + a_{43}x_3 = b_4 \\ \qquad\qquad\qquad a_{63}x_3 = b_6 \end{cases}$$

Привести систему до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень:

- ✓ переміну місцями рівнянь системи;
- ✓ почленне множення обох частин одного з рівнянь системи на відмінне від нуля число;
- ✓ додавання до обох частин рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на деяке число λ.

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$
$$\lambda = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i$$

Формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Основні властивості

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx\text{, де } A = const$$

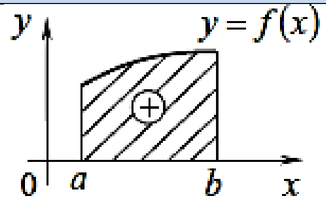
$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Методи інтегрування

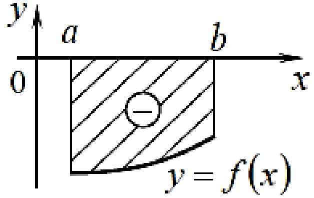
Заміна змінної	Інтегрування частинами
$\int_a^b f(x)dx = \left\lvert\begin{matrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi^{/}(t)dt \\ \alpha\le t\le\beta \end{matrix}\right\rvert = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi^{/}(t)dt$	$\int_a^b udv = uv\Big\rvert_a^b - \int_a^b vdu$

Деякі геометричні застосування визначеного інтеграла

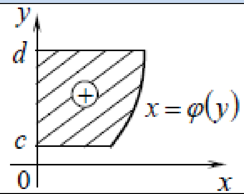
Площа плоскої фігури в декартових координатах



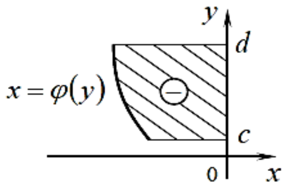
$$S = \int_a^b f(x)dx$$



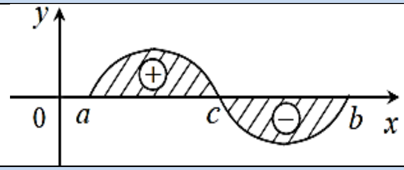
$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = -\int_a^b f(x)dx$$



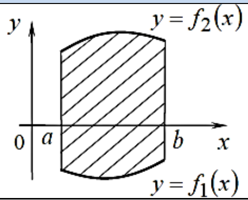
$$S = \int_c^d \varphi(y)dy$$



$$S = \left|\int_c^d \varphi(y)dy\right| = -\int_c^d \varphi(y)dy$$



$$S = \int_a^c f(x)dx + \left|\int_c^b f(x)dx\right|$$



$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

ВИЗНАЧНИКИ

Визначники другого порядку

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to detA=\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$ – число

$$\Delta= {}^{+}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^{-} = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

бічна діагональ   головна діагональ

Визначники третього порядку

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \to detA=\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ – число

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{31}a_{22}a_{13}-$$

$$-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{21}a_{12}a_{33}$$

або

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Мінор елемента a_{ij} визначника Δ – це визначник, отриманий з даного, шляхом викреслюванням i–рядка та j–стовпця.
Позначення: M_{ij}

Алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} визначника Δ, це мінор цього елемента, помножений на $(-1)^{i+j}$:
Позначення: A_{ij}.

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧНИКІВ

1. Визначник не зміниться, якщо в ньому рядки замінити стовпцями і навпаки (тобто транспонувати).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

2. При перестановці двох рядків (стовпців) визначник змінює знак на протилежний.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

3. Спільний множник всіх елементів рядка (стовпця) можна виносити за знак визначника.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

4. Визначник, що має два однакових рядка (стовпця) дорівнює нулю.

4.1 Якщо всі елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

5. Якщо всі елементи рядка (стовпця) дорівнюють нулі, то визначник дорівнює нулю.

6. Якщо у визначника елементи будь-якого рядка (стовпця) складаються з двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у першого з яких відповідними елементами є перші доданки, а у другого – другі.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b \\ a_{21} & a_{22}+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b \\ a_{21} & c \end{vmatrix}$$

7. Визначник не зміниться, якщо до його елементів будь-якого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й теж число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^{\times k} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix}$$