Тема 1. Розв'язування СЛР методом Гаусса та Крамера.

План

1. Теоретичні відомості.

2. Завдання для самостійного виконання.

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.

2.2 Зразок оформлення ІДЗ.

Теоретичні відомості

Метод Крамера

Нехай задано систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

Введемо позначення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Означення. Визначник Δ, складений з коефіцієнтів при невідомих системи (1), називається *головним визначником системи*.

При розв'язуванні системи (1) можуть виникнути три суттєво різні випадки.

1) Якщо $\Delta \neq 0$, то система (1) має єдиний розв'язок, який визначається формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \qquad (2)$$

2) Якщо $\Delta = 0$ і хоча б один із визначників $\Delta_i, i = \overline{1,3}$, відмінний від нуля, то система несумісна.

3) Якщо $\Delta = 0$, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то система має або безліч розв'язків.

Метод Гаусса.

Цей метод носить ще назву метода послідовного виключення невідомих. Метод полягає в тому, що система (1) за допомогою алгебраїчних перетворень приводиться до вигляду трикутної. Але більш зручно користуватися цим методом в табличній формі (таблиця 1)

№ рядка	Коефіцієнти при			Вільні члени	Сума	Контроль
	x_1	x_2	x_3			
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1	$a_{11}+a_{12}+a_{13}+b_1=S_1$	
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2	$a_{21}+a_{22}+a_{23}+b_2=S_2$	
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3	$a_{31}+a_{32}+a_{33}+b_3=S_3$	

4	–	$a_{42} = a_{11}a_{22} - a_{21}\, a_{12}$	$a_{43} = a_{11}a_{23} - a_{21}\, a_{13}$	$b_4 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$	$a_{42} + a_{43} + b_4 = S_4$	$a_{11}S_2 - a_{21}S_1 = S_4$
5	–	$a_{52} = a_{11}a_{32} - a_{31}\, a_{12}$	$a_{53} = a_{11}a_{33} - a_{31}\, a_{13}$	$b_5 = a_{11}b_3 - a_{31}b_1$	$a_{52} + a_{53} + b_5 = S_5$	$a_{11}S_3 - a_{31}S_1 = S_5$
6	–	–	$a_{63} = a_{42}a_{53} - a_{52}a_{43}$	$b_6 = a_{42}b_5 - a_{52}b_4$	$a_{63} + b_6 = S_6$	$a_{42}S_5 - a_{52}S_4 = S_6$

При розв'язуванні СЛР можливі випадки:

1. Якщо при приведенні системи (1) до трикутного вигляду, останнє (третє) рівняння буде мати вигляд $0 \cdot x_3 = 0$, то система (1) має безліч розв'язків. Позначимо $x_3 = c\ (c \in R)$, з другого та першого рівнянь виразимо x_2 та x_1 через c.

2. Якщо останнє рівняння в системі (3) буде мати вигляд $0 \cdot x_3 = c, (c \in R/\{0\})$, то система несумісна.

2. Завдання для самостійного виконання

Індивідуальне домашнє завдання (номер варіанта відповідає номеру у журналі) Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса та Крамера:

ВАРІАНТИ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ			
1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$	2. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -6 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$	3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -6 \end{cases}$	4. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 8 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$	7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 10 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$	8. $\begin{cases} -x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$
9. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$	10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$	11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = -6 \end{cases}$	12. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$
13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$	14. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \\ 6x_1 - 7x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$	15. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$	16. $\begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$
17. $\begin{cases} 2x_1 + 0x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$	18. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$	19. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$	20. $\begin{cases} 4x_1 - 8x_2 - 5x_3 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

1. Опрацювати теоретичний матеріал.
2. Оформити роботу в зошиті для самостійних та практичних робіт.

2.2 Зразок оформлення індивідуального домашнього завдання

Завдання. Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$ методом Гаусса та Крамера.

Розв'язання:

Метод Гаусса : складаємо обчислювальну таблицю:

Номер	Коефіцієнти при	Вільні члени	Сума	Контроль

рядка	x_1	x_2	x_3			
1	1	4	3	9	$1+4+3+9=17$	
2	2	3	1	8	$2+3+1+8=14$	
3	1	1	-2	3	$1+1-2+3=3$	
4	-	$1\cdot3-2\cdot4=-5$	$1\cdot1-2\cdot3=-5$	$1\cdot8-2\cdot9=-10$	$-5-5-10=-20$	$1\cdot14-2\cdot17=-20$
5	-	$1\cdot1-1\cdot4=-3$	$1\cdot(-2)-1\cdot3=-5$	$1\cdot3-1\cdot9=-6$	$-3-5-6=-14$	$1\cdot3-1\cdot17=-14$
6	-	-	$-5\cdot(-5)-(-3)\cdot(-5)=10$	$-5\cdot(-6)-(-3)\cdot(-10)=0$	$10+0=10$	$-5\cdot(-14)-(-3)\cdot(-20)=10$

Згідно рядків 1, 4, 6 записуємо систему трикутного вигляду: $\begin{cases} x_1+4x_2+3x_3=9, \\ -5x_2-5x_3=-10, \\ 10x_3=0. \end{cases}$.

З даної системи знаходимо невідомі

$$\begin{cases} x_1=9-4x_2-3x_3, \\ x_2=-\frac{1}{5}(-10+5x_3) \\ x_3=\frac{0}{10}. \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x_1=9-4\cdot2-3\cdot0, \\ x_2=-\frac{1}{5}(-10+5\cdot0) \\ x_3=0. \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x_1=1, \\ x_2=2, \\ x_3=0. \end{cases}.$$

Метод Крамера: обчислюємо головний визначник системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=1\cdot3(-2)+2\cdot1\cdot3+1\cdot1\cdot4-1\cdot3\cdot3-1\cdot1\cdot1-(-2)\cdot4\cdot2=-6+6+4-9-1+16=10\neq0.$$

Отже система має розв’язок.

Обчислюємо допоміжні визначники:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 8 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=9\cdot3(-2)+8\cdot1\cdot3+3\cdot1\cdot4-3\cdot3\cdot3-1\cdot1\cdot9-(-2)\cdot4\cdot8=-54+24+12-27-9+64=10$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=1\cdot8(-2)+2\cdot3\cdot3+1\cdot1\cdot9-1\cdot8\cdot3-3\cdot1\cdot1-(-2)\cdot9\cdot2=-16+18+9-24-3+36=20$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot3\cdot3+2\cdot1\cdot9+1\cdot8\cdot4-1\cdot3\cdot9-1\cdot8\cdot1-3\cdot4\cdot2=9+18+32-27-8-24=0.$$

За формулами Крамера знаходимо невідомі:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{10}{10}=1,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{20}{10}=2,\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{0}{10}=0.$$

Тема 2. Розв'язування СЛР методом оберненої матриці.

План

1. Теоретичні відомості.

2. Завдання для самостійного виконання.

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.

2.2 Зразок оформлення ІДЗ.

Теоретичні відомості

Обмежимось розглядом системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1}$$

Введемо позначення:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матриця системи, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – матриця вільних членів, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – матриця невідомих.

Знайдемо добуток матриць $A \cdot X$:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}.$$

Користуючись означенням рівності матриць, бачимо, що СЛР (1) є не що інше як рівність відповідних елементів матриць – стовпців $A \cdot X$ і B. Тому систему (1) можна записати у матричному вигляді.

$$A \cdot X = B \tag{2}$$

Для розв'язання даного рівняння помножимо зліва на обернену матрицю A^{-1}, вважаючи, що $\Delta \neq 0$, отримаємо $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Але $A^{-1}A = E$, а $EX = X$, тоді розв'язання матричного рівняння запишеться у вигляді:

$$X = A^{-1}B \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 \end{pmatrix}$$

2. Завдання для самостійного виконання

Індивідуальне домашнє завдання (номер варіанта відповідає номеру у журналі) Розв’язати систему лінійних рівнянь методом оберненої матриці:

ВАРІАНТИ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ			
1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$	2. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -6 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$	3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -6 \end{cases}$	4. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 8 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$	7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 10 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$	8. $\begin{cases} -x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$
9. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$	10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$	11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = -6 \end{cases}$	12. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$
13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$	14. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \\ 6x_1 - 7x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$	15. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$	16. $\begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$
17. $\begin{cases} 2x_1 + 0x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$	18. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$	19. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$	20. $\begin{cases} 4x_1 - 8x_2 - 5x_3 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

1. Опрацювати теоретичний матеріал.
2. Оформити роботу в зошиті для самостійних та практичних робіт.

2.2 Зразок оформлення індивідуального домашнього завдання

Завдання. Показати, що система має єдиний розв’язок та знайти його за методом оберненої матриці: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 13 \\ 4x_1 + 7x_2 + 0x_3 = -13. \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$

Розв’язання:

1) Запишемо систему у матричному вигляді $A \cdot X = B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 13 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2) Обчислимо визначник Δ матриці:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 7\cdot 5 + 4\cdot(-2)\cdot 1 + (-1)\cdot 0\cdot(-3) - (-1)\cdot 7\cdot 1 - (-2)\cdot 0\cdot 2 - 5\cdot(-3)\cdot 4 = 129.$$

Так як визначник системи $\Delta = 129 \neq 0$, то дана система має єдиний розв’язок і існує матриця обернена до даної.

4) Знайдемо обернену матрицю, для цього обчислимо алгебраїчні доповнення A_{ij}:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 35; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 13; \qquad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -20; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 11; \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 7; \qquad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 26.$$

5) Отримані результати підставляємо у формулу (3):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{129}\begin{pmatrix} 35 & 13 & -7 \\ -20 & 11 & 4 \\ -1 & 7 & 26 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 13 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{129}\begin{pmatrix} 35\cdot 13 + 13\cdot(-13) + (-7)\cdot 4 \\ -20\cdot 13 + 11\cdot(-13) + 4\cdot 4 \\ -1\cdot 13 + 7\cdot(-13) + 26\cdot 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{129}\begin{pmatrix} 258 \\ -387 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв’язок системи єдиний, це сукупність чисел $(2; -3; 0)$.

Тема 3. Графічне розв’язання систем лінійних нерівностей.

План

1. Теоретичні відомості.

2. Завдання для самостійного виконання.

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.

2.2 Зразок оформлення ІДЗ.

Теоретичні відомості

Для зображення множини розв’язків нерівності з двома невідомими на координатній площині використовують алгоритм.

алгоритм

1. Замінюємо у нерівності $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 > b_1$знак нерівності на знак дорівнює $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$. Отримаємо граничну пряму, яку і побудуємо (пунктиром, якщо нерівність строга, суцільною лінією, якщо нерівність нестрога) на координатній площині. Пряма розіб’є площину на дві півплощини.
2. Вибираємо будь-яку з півплощин і розглядаємо в ній довільну точку. У багатьох випадках, якщо це можливо вибираємо точку $O(0;0)$. Підставляють координати даної точки у нерівність і перевіряють виконання нерівності. Якщо у результаті перевірки отримуємо вірну числову нерівність, то робимо висновок, що нерівність виконується у всій області, якій належить вибрана точка. Якщо в результаті перевірки отримаємо невірну нерівність, то множиною розв’язків буде друга півплощина, якій вибрана точка не належить.
3. Якщо нерівність строга, то границі області (тобто гранична пряма) не включають в множину розв’язків, якщо нестрога – то включають.

2. Завдання для самостійного виконання

Індивідуальне домашнє завдання (номер варіанта відповідає номеру у журналі). Розв’язати систему лінійних нерівностей графічним способом:

1) $\begin{cases} x_1 \ge 2 \\ x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2 \ge 0 \\ x_1 - x_2 \ge -2 \\ 2x_1 - x_2 \ge 3 \\ x_1 \le 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 - x_2 \ge 0 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \le 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 - 1 \le 0 \\ 3x_1 + x_2 \ge 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5 \ge 0 \\ x_1 - x_2 - 5 \ge 0 \\ x_1 \le 7 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 5 \ge 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3 \le 0 \\ x_1 \le 5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 \geq 3 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4 \leq 0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 1 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 - 7 \geq 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4 \leq 0 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_2 \geq 0 \\ x_2 \geq 6 \\ 4x_1 - x_2 \geq 0 \\ 4x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 - x_2 + 8 \geq 0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 \leq 3 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x_1 \geq \frac{1}{2} \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ 1 \leq x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 4 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \geq 0 \\ x_1 \leq 6 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x_1 - 8x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 - 5x_2 \leq -5 \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 30 \end{cases}$

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

Оформити роботу в зошиті для самостійних та практичних робіт.

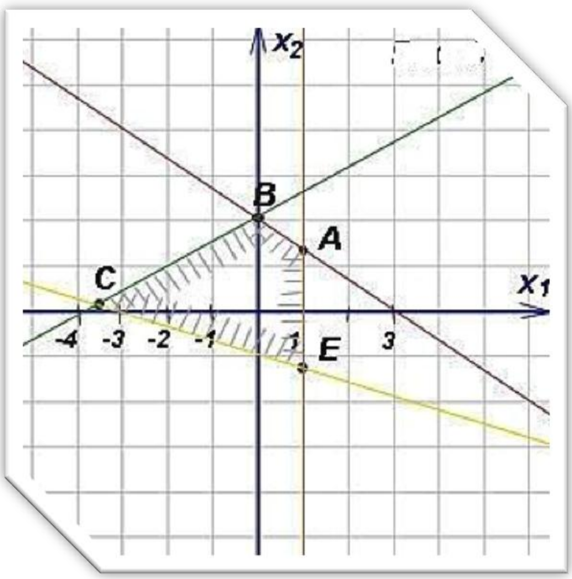
2.2 Зразок оформлення індивідуального домашнього завдання

Завдання. Розв’язати систему лінійних нерівностей графічним способом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ -x_1 - 3x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 1 \end{cases}$$

Розв’язання.

Будуємо граничні прямі, які відповідають нерівностям системи. Робимо кроки, які зазначені в алгоритмі для кожної нерівності. Тепер визначаємо півплощину розв’язків для кожної нерівності.



Півплощини розв'язків відповідних нерівностей даної системи, заштриховані в середину. Перетини півплощин розв'язків зображується як показано на рисунку, у вигляді чотирикутника *ABCE. Отже розв'язком даної системи нерівностей є чотирикутник ABCE.*

Тема 4. Відшукання найбільшого (найменшого) значення лінійної функції на опуклому многокутнику.

План

1. **Теоретичні відомості.**

2. Завдання для самостійного виконання.

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.

2.2 Зразок оформлення ІДЗ.

Теоретичні відомості

Задача лінійного програмування (ЗЛП): основні визначення

Лінійне програмування – метод розв'язання задач оптимізації.

Загальна задача лінійного програмування – це задача, в якій необхідно знайти максимум або мінімум (оптимум) функції, що називається функцією цілі, при обмеженнях, що задані системою лінійних нерівностей або рівнянь.

При цьому змінні повинні приймати невід'ємні значення (тобто додатні або нульові).

Функція цілі зазвичай записується так: $C = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$.

Або в скороченому вигляді:

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Можна зустріти позначення цільової функції і через C і через F.

Система обмежень в задачі лінійного програмування зазвичай записується у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \vee b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \vee b_2 \\ \quad\quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \vee b_m \end{cases}$$, де $\vee$ один із знаків: $=, <, >, \leq, \geq, \neq$.

І система обмежень, і цільова функція мають *лінійній характер*, тобто містять змінні тільки в першому степені.

Канонічною задачею лінійного програмування називається задача, в якій необхідно знайти максимум цільової функції при обмеженнях, що задані системою лінійних рівнянь.

Якщо всі або деякі обмеження містять нерівності, то задачу можна звести до канонічного вигляду шляхом перетворення нерівностей в рівняння.

У більшості випадках задач лінійного програмування обмеження задаються у вигляді системи нерівностей або система може бути змішаною: частина системи рівняння, а частина нерівності. Але будь-яку систему обмежень можна привести до системи рівнянь. Для цього достатньо до лівої частини кожної нерівності додати або відняти деяке невідємне число – додаткову змінну, щоб кожна нерівність перетворилась на рівняння. Ці дії називають зведенням задачі лінійного програмування до канонічного виду.

Приклад. Записати систему нерівностей $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ -x_1 - 3x_2 \le 3 \end{cases}$ у вигляді рівнянь для зведення ЗЛП до канонічного вигляду.

Розв'язання:

Додаючи до лівих частин нерівностей по одній додатковій змінній, отримаємо систему рівнянь: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ -x_1 - 3x_2 + x_5 = 3 \end{cases}$. Таким чином, як би не були задані обмеження ЗЛП, їх завжди можна привести до систем рівнянь, використовуючи додаткові змінні.

Множина чисел, що задовольняють систему обмежень називають розв'язком цієї системи або *планом*, іноді *програмою*.

Оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування називається розв'язок системи, при якому функція цілі перетворюється в максимум (мінімум), в залежності від умови задачі.

Розв'язок ЗЛП називається *виродженим*, якщо в ньому деякі змінні дорівнюють нулеві.

Задачі лінійного програмування у випадку двох змінних можна розв'язувати графічним способом, а випадку коли змінних більше використовується симплекс – метод.

Графічний спосіб розв'язання ЗЛП

Необхідно знайти невід'ємні значення змінних x_1 та x_2, що задовольняють систему нерівностей $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \le b_n \end{cases}$, при яких лінійна форма $F = c_1x_1 + c_2x_2$ приймає оптимальне значення.

Множина пар чисел x_1 та x_2, що задовольняють систему складають многокутник цієї системи. Припустимо, що це п'ятикутник *ABCDE* (рис. 1).

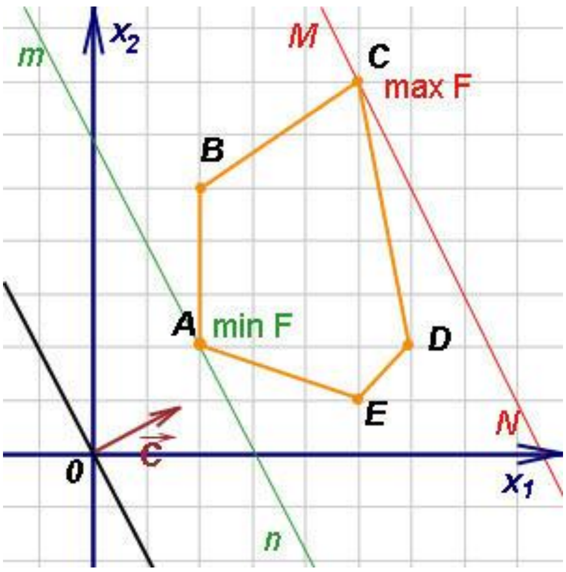


Рис. 1

Лінійна форма $F = c_1x_1 + c_2x_2$ графічно означає сукупність паралельних між собою прямих. При конкретному числовому значенні F лінійна форма зображується у вигляді деякої прямої. Кожну з прямих цієї сукупності називають лінією рівня. На рисунку побудована лінія рівня $F = c_1x_1 + c_2x_2$ (чорного кольору, проходить через початок координат), що відповідає значенню $F = 0$.

Якщо вихідну лінію рівня пересувати вправо, то значення F при цьому зростає. Необхідний напрям руху вихідної лінії рівня можна встановити наступним чином: коефіцієнти при змінних в рівнянні прямої є координатами вектора, що перпендикулярний до цієї прямої або його називають нормальним вектором прямої. Таким чином, отримаємо вектор $\vec{c} = (c_1; c_2)$ (на рисунку бордового кольору). Значення функції F зростають при переміщенні вихідної лінії рівня в напрямку вектора $\vec{c}$.

Серед сукупності паралельних прямих прямі mn (зеленого кольору) и MN (червоного кольору), які назвемо опорними прямими. Опорними називають такі прямі, які мають з многокутником $ABCDE$ хоча б одну спільну точку, і многокутник $ABCDE$ лежить по один бік від цієї прямої. лінійна форма досягає максимального (мінімального) значень в крайніх точках многогранника розв'язків. Це значить, що опорні прямі mn та MN характеризують екстремальні значення лінійної форми (функції цілі), тобто в точках A та C лінійна форма досягає оптимальних значень. В точці A, що знаходиться ближче до початку координат, функція цілі досягає мінімального значення, а в точці C, що знаходиться далі від початку координат – максимального значення.

Схема розв'язку ЗЛП графічним методом

1. Побудувати многокутник розв'язків системи нерівностей.

2. Побудувати пряму, що відповідає лінійній формі.

3. Рухаючи пряму (або лінійку) вздовж вектора $\vec{c}$ до дотику з многокутником розв'язків. Якщо перший дотик з многокутником розв'язків відбудеться в крайній точці многокутника, то в цій точці функція цілі досягає мінімального значення. Якщо дотик відбудеться зі стороною многокутника, то функція цілі досягає мінімуму у всіх точках цієї сторони.

4. Рухаючись далі, прийдемо до деякого опорного положення, коли пряма буде мати одну спільну точку з многокутником розв'язків. В цій точці функція цілі досягає свого максимуму.

5. Якщо побудована лінія, що зображує цільову функцію, перетинає многокутник розв'язків, то функція цілі досягає мінімального значення в вершині многокутника, що розташована ближче до початку координат, а максимального значення – в вершині, більш віддаленої від початку координат.

2. Завдання для самостійного виконання

Індивідуальне домашнє завдання (номер варіанта відповідає номеру у журналі). Розв'язати графічним методом задачу лінійного програмування:

1

$$F = x_1 + 3x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 4x_1 \geq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2

$$F = x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3

$$F = x_1 - x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4

$$F = x_1 - 2x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq 30 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ -3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5

$$F = x_1 - 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq 30 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ -3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

6

$$F = 2x_1 - x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq -1 \\ x_2 \leq 3 \end{cases}$$

7

$$F = x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

8

$$F = x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 30 \\ 5x_1 - x_2 \leq 25 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

9

$$F = 2x_1 + 5x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 127 \\ 7x_1 - x_2 \leq 83 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

10

$$F = 4x_1 + 6x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

11

$$F = -3x_1 - 4x_2 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ x_1;\ x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 10 \\ x_2 \geq 5 \end{cases}$$

12

$$F = -6x_1 - 2x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 9 \\ 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

13	$F = x_1 + x_2 \to min$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$	**14**	$F = 2x_1 + 3x_2 \to min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$
15	$F = x_1 - x_2 \to max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ 2 \leq x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0 \\ x_1 \leq 4 \end{cases}$	**16**	$F = 3x_1 + 4x_2 \to min$ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 18 \\ 3x_1 - x_2 \geq 3 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ 0 \leq x_1 \leq 5 \\ 0 \leq x_2 \leq 6 \end{cases}$

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

1. Опрацювати теоретичний матеріал.
2. Оформити роботу в зошиті для самостійних та практичних робіт.

2.2 Зразок оформлення індивідуального домашнього завдання

Завдання. Розв’язати графічним методом задачу лінійного програмування, в якій необхідно знайти максимум функції $F = x_1 + 3x_2$ при обмеженнях $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$.

Розв’язання:

Побудуємо многокутник розв’язків.

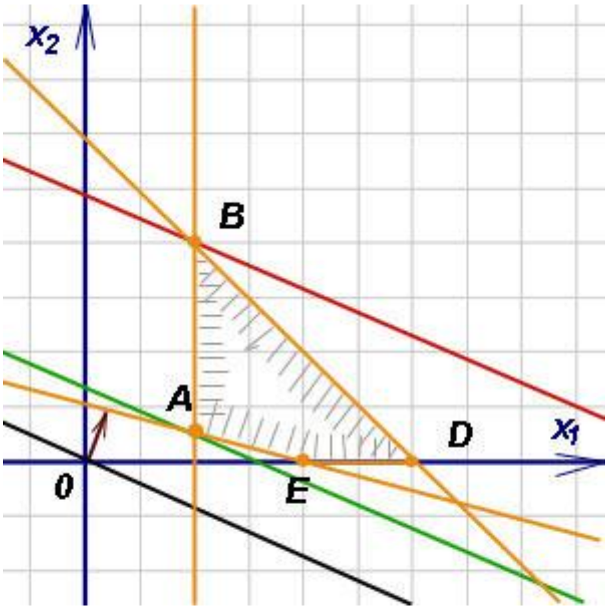
Для цього побудуємо граничні прямі.

В нерівності $x_1 + 4x_2 \geq 4$ замінюємо знак " $\geq$ " на знак " $=$ ". $x_1 + 4x_2 = 4$ – гранична пряма.

Будуємо граничну пряму $2x_1 + x_2 = 4$; для побудови граничної прямої складемо таблицю значень.

x_1	x_2
0	1
4	0

Координати даних точок зображаємо у координатній площині і з’єднуємо суцільною лінією. Аналогічно будуємо інші граничні прямі.



З рисунка видно, що множина точок чотирикутника $ABDE$ задовольняє всі чотири нерівності системи. Отже чотирикутник $ABDE$ є многокутником розв'язків системи.

Побудуємо лінію функції цілі (чорний колір).

Рухаємо цю пряму паралельно самій собі у напрямку вектора $\vec{c} = (1; 3)$ (бордовий колір), отримаємо опорні прямі. Перша пряма (зеленого кольору) має з многокутником спільну точку A. Тут функція цілі досягає мінімуму. Рухаючись далі, прийдемо до точки В. Тут максимум. Координати точки В: $(2,4)$. Підставляючи в функцію цілі координати точки В, отримаємо максимальне значення функції цілі $F_{max} = 14$.

Тема 5. Поняття про задачі лінійного програмування. Транспортна задача.

План

1. **Теоретичні відомості.**
2. **Завдання для самостійного виконання.**

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.

2.2 Зразок оформлення ІДЗ.

Теоретичні відомості

Транспортна задача – одна з задач лінійного програмування. Її мета – розробка найбільш раціональних шляхів та способів транспонування товарів, усунення надмірно далеких, зустрічних, повторних перевезень. Все це скорочує час просування товарів, зменшує витрати підприємств, фірм, пов'язані зі здійсненням процесів постачання сировиною, матеріалами, паливом, обладнанням і таке інше.

В загальному вигляді задачу можна представити таким чином: в $\boldsymbol{m}$ пунктах виробництва $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_m}$ є в наявності однорідний вантаж в кількості відповідно $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_m}$. Цей вантаж необхідно доставити в $\boldsymbol{n}$ пунктів призначення $\boldsymbol{B_1, B_2, \ldots, B_n}$ в кількості відповідно $\boldsymbol{b_1, b_2, \ldots, b_n}$. Вартість перевезення одиниці вантажу (тариф) з пункту A_i в пункт B_j дорівнює c_{ij}.

Потрібно скласти план перевезень, що дозволяє вивезти всі вантажі і має мінімальну вартість.

Залежно від співвідношення між сумарними запасами вантажу і сумарними потребами в ньому транспортні завдання можуть бути закритими і відкритими.

Визначення. Якщо

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

то задача називається закритою, якщо

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

то задача називається відкритою.

Позначимо через $\boldsymbol{x_{ij}}$ кількість вантажу, що перевозиться з пункту $\boldsymbol{A_i}$ в пункт $\boldsymbol{B_j}$. Розглянемо закриту транспортну задачу. Її умову запишемо в розподільну таблицю, яку будемо використовувати для знаходження розв'язку (табл. 1).

Таблиця 1

A_i	B_j	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n
		b_1	b_2	…	b_j	…	b_n
A_1	a_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	…	x_{1j} c_{1j}	…	x_{1n} c_{1n}
A_2	a_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	…	x_{2j} c_{2j}	…	x_{2n} c_{2n}
…		…	…	…	…	…	…
A_i	a_i	x_{i1} c_{i1}	x_{i2} c_{i2}	…	x_{ij} c_{ij}	…	x_{in} c_{in}
…		…	…	…	…	…	…
A_m	a_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	…	x_{mj} c_{mj}	…	x_{mn} c_{mn}

Математична модель закритої транспортної задачі має вигляд:

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

(кількість вантажу, призначеного для доставки від i-го постачальника всім споживачам, дорівнює запасу вантажу у цього постачальника).

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

(кількість вантажу, призначеного для B_j-го споживача, завезеного від будь якого постачальника, дорівнює потребі у вантажу цього пункту призначення).

$$x_{ij} \geq 0$$

Рішення транспортної задачі можливо тільки при дотриманості рівності загальних запасів та потреб, тобто задача повинна бути закритою.

Якщо баланс ресурсів не дотримується, тобто задача відкрита, то в такому випадку задачу спочатку треба привести до закритого виду шляхом введення в таблицю рядка фіктивного постачальника або стовпчика фіктивного споживача.

Для розв'язування транспортних задач розроблений спеціальний метод, який має наступні етапи:

- ✓ знаходження вихідного опорного розв'язання;
- ✓ перевірка цього розв'язку на оптимальність;
- ✓ перехід від одного опорного розв'язку до іншого.

Розглянемо кожний з цих етапів.

знаходження вихідного опорного розв'язання

Умови задачі та її вихідний опорний розв'язок будемо записувати в розподільну таблицю. Клітини, в які помістимо вантажі, називаються зайнятими, їм відповідають базисні змінні опорного розв'язання. Решта клітин незайняті, або порожні, їм відповідають вільні змінні. В верхньому правому куті кожної клітини будемо записувати тарифи.

Існує декілька способів знаходження вихідного опорного розв'язання. Розглянемо один з них.

метод мінімального тарифу (елемента)

Відповідно до цього методу, вантажі розподіляються в першу чергу в ті клітини, в яких знаходиться мінімальний тариф перевезень c_{ij}, далі поставки розподіляються в незайняті клітини з найменшими тарифами з урахуванням запасів, що залишилися у постачальників і задоволення попиту споживачів.

Процес розподілу продовжують до тих пір, поки всі вантажі від постачальників не будуть вивезені, а споживачі не будуть задоволені. при розподілі вантажів може виявитися, що кількість зайнятих клітин менше, ніж $m+n-1$. В цьому випадку відсутнє їх число заповнюється клітинами з нульовими поставками, такі клітини називають умовно зайнятими.

Нульові поставки поміщають в незайняті клітини з урахуванням найменшого тарифу таким чином, щоб в кожних рядку і стовпці було не менше ніж по одній зайнятій клітинці.

Розглянемо знаходження вихідного опорного розв'язання транспортної задачі на конкретному прикладі.

Приклад 1. (визначення ефективного варіанта доставки виробів до споживача)

На складах $A_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ є запаси продукції в кількостях $90, 400, 110$ т відповідно. Споживачі B_1, B_2, B_3 повинні отримати цю продукцію в кількостях $140, 300, 160$ т відповідно. Знайти такий варіант прикріплення постачальників до споживачів, при якому сума витрат на перевезення була б мінімальною. Витрати з перевезення 1 т продукції задані матрицею (ум. од.) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

Перевіримо, чи є дана транспортна задача закритою:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 90 + 400 + 110 = 600 \text{ т}$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_j = 140 + 300 + 160 = 600 \text{ т}$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j$$

отже, дана транспортна задача закрита. Знайдемо вихідне опорне розв'язання по методу мінімального тарифу.

Таблиця 2

a_i	b_j	1 140	2 300	3 160
1	90	2 90	5	2
2	400	4	1 300	5 100
3	110	3 50	6	8 60

Число зайнятих клітин в табл. 2 дорівнює $m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$, тобто умова невиродженості виконана. Отримали вихідне опорне розв'язання, яке запишемо у вигляді матриці: $X_1 = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 100 \\ 50 & 0 & 60 \end{pmatrix}$.

Вартість перевезення при вихідному опорному розв'язанні становить:

$$F(X_1) = 90 \cdot 2 + 100 \cdot 5 + 50 \cdot 3 + 60 \cdot 8 = 1610 \text{ ум. од.}$$

перевірка знайденого опорного розв'язання на оптимальність

Знайдене вихідне опорне розв'язання перевіряється на оптимальність методом потенціалів за наступним критерієм: якщо опорне рішення транспортної задачі є оптимальним, то йому відповідає система $m + n$ дійсних чисел u_i і v_j, які відповідають умовам $u_i + v_j = c_{ij}$ для зайнятих клітин і $u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$ для вільних клітин.

Числа u_i і v_j називають потенціалами. У розподільну таблицю добавляють рядок v_j і стовпець u_i.

Потенціали u_i і v_j знаходять з рівності $u_i + v_j = c_{ij}$, справедливого для зайнятих клітин. Одному з потенціалів дається довільне значення, наприклад $u_1 = 0$, тоді інші потенціали визначаються однозначно. Так, якщо відомий потенціал u_i, то $v_j = c_{ij} - u_i$; якщо відомий потенціал v_j, то $u_i = c_{ij} - v_j$.

Позначимо $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Цю оцінку називають оцінкою вільних клітин. Якщо $\Delta_{ij} \leq 0$, то опорне розв'язання є оптимальним. Якщо хоча б одна з оцінок

$\Delta_{ij} > 0$, то опорне розв'язання не є оптимальним і його можна поліпшити, перейшовши від одного опорного розв'язання до іншого.

Перевіримо знайдене опорне розв'язання на оптимальність, додавши в розподільну табл. 3 стовпець u_i і рядок v_j. Вважаючи $u_1 = 0$, запишемо це значення в останньому стовпчику таблиці.

Таблиця 3

a_i \ b_j		1 140	2 300	3 160	u_i
1	90	2 90	5	2	0
2	400	4	1 300	5 100	-2
3	110	3 50	6	8 60	1
v_j		2	3	7	

Розглянемо зайняту клітину першого рядка, яка розташована в першому стовпці (1.1), для неї виконується умова $u_1 + v_1 = 2$, звідки $v_1 = 2$. Це значення запишемо в останньому рядку таблиці. Далі треба розглядати ту із зайнятих клітин таблиці, для якої один з потенціалів відомий. Розглянемо зайняту клітку (3.1): $u_3 + v_1 = 3$, $v_1 = 2$, звідки $u_3 = 1$.

Для клітини (3.3): $u_3 + v_3 = 8, u_3 = 1, v_3 = 7$.
Для клітини (2.3): $u_2 + v_3 = 5$, $v_3 = 7$, $u_2 = -2$.
Для клітини (2,2): $u_2 + v_2 = 1$, $u_2 = -2$, $v_2 = 3$.
Знайдені значення потенціалів заносимо в таблицю.
Обчислюємо оцінки вільних клітин:
$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 3 - 5 = -2 < 0$,
$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 7 - 2 = 5 > 0$,
$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -2 + 2 - 4 = -4 < 0$,
$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 1 + 3 - 6 = -2 < 0$.
Отримали оцінку $\Delta_{13} = 5 > 0$, отже вихідне опорне розвязання не є оптимальним, його можна покращити.

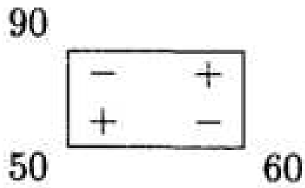
перехід від одного опорного розв'язання до іншого

Наявність позитивної оцінки вільної клітини ($\Delta_{ij} > 0$) при перевірці опорного розв'язання на оптимальність свідчить про те, що отримане розв'язання не оптимальне і для зменшення значення цільової функції треба перейти до іншого опорного рішення. При цьому треба перерозподілити вантажі, переміщаючи їх із зайнятих клітин в вільні. Вільна клітина стає зайнятою, а одна з раніше зайнятих клітин – вільною. Для вільної клітини з $\Delta_{ij} > 0$ будується цикл (ланцюг, многокутник), всі вершини якого крім однієї знаходяться в зайнятих клітинах; кути прямі, число вершин парне.

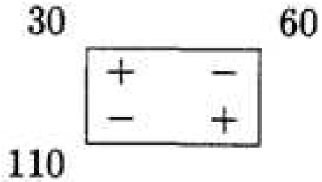
Біля вільної клітини циклу ставиться знак $(+)$, потім по черзі проставляють знаки $(-)$ і $(+)$. У вершин зі знаком $(-)$ вибирають мінімальний вантаж, його додають до вантажів, що стоять біля вершин зі знаком $(+)$, і віднімають від вантажів у вершин зі знаком $(-)$. В результаті перерозподілу вантажу отримаємо нове опорне розв'язання. Це розв'язання перевіряємо на оптимальність, і т.д. до тих пір, поки не отримаємо оптимальне розв'язання.

Розглянемо перехід від одного опорного розв'язання до іншого на заданому прикладі.

Будуємо цикл для клітини (1.3), що має позитивну оцінку. У вершин циклу ставимо знаки $(+)$ і $(-)$ і записуємо вантажі:



У вершин зі знаком $(-)$ вибираємо мінімальний вантаж, він дорівнює 60. Його додаємо до вантажів, що стоять у додатних вершинах, і віднімаємо від вантажів, що стоять у від'ємних вершинах. Отримаємо новий цикл:



Нове опорне розв'язання: $X_2 = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 60 \\ 0 & 300 & 100 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

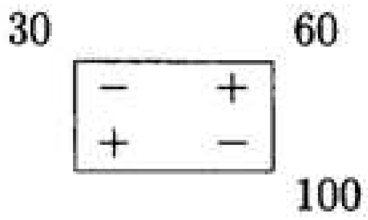
Перевіримо отримане розв'язання на оптимальність. Для цього запишемо його в розподільну таблицю, знайдемо потенціали зайнятих і оцінки вільних клітин (табл. 4).

Таблиця 4

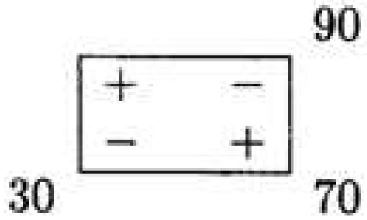
a_i \ b_j		1 140	2 300	3 160	u_i
1	90	2 30	5	2 60	0
2	400	4	1 300	5 100	3
3	110	3 110	6	8	2
v_j		2	-2	2	

Маємо: $\Delta_{12} = -7$, $\Delta_{21} = 1 > 0$, $\Delta_{32} = -7$, $\Delta_{33} = -5$.

Побудуємо цикл для клітини з додатною оцінкою $\Delta_{21} = 1$.



Виконаємо перерозподіл вантажів:



Отримаємо нове рішення, яке занесемо в табл. 5. Перевіримо його на оптимальність.

Таблиця 5

a_i \ b_j		1 140	2 300	3 160	u_i
1	90	2	5	2 90	0
2	400	4 30	1 300	5 70	3
3	110	3 110	6	8	2
v_j		1	-2	2	

Отримаємо: $\Delta_{11} = -1$, $\Delta_{12} = -1 > 0$, $\Delta_{32} = -6$, $\Delta_{33} = -4$.

Всі оцінки вільних клітин від'ємні, отже, знайдене розв'язання оптимальне. Отже, $X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Вартість транспортних витрат дорівнює

$F(X)_{min} = 90 \cdot 2 + 30 \cdot 4 + 300 \cdot 1 + 70 \cdot 5 + 110 \cdot 3 = 1280$ ум. од.

У порівнянні з вихідним опорним рішенням транспортні витрати зменшилися на 1610 - 1280 = 330 ум. од.

2. Завдання для самостійного виконання

Скласти конспект по темі «Поняття про задачі лінійного програмування. Транспортна задача».

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

Конспект оформити в зошиті для самостійних та практичних робіт, дотримуючись наступного плану:

1. Транспортна задача. Загальна постановка задачі.
2. Транспортна задача відкритого та закритого типу.
3. Математична модель транспортної задачі.
4. Методи розв'язання транспортної задачі:
   а) метод потенціалів;
   б) симплекс – метод.
5. Основні етапи розв'язання транспортної задачі.
6. Методи знаходження опорного розв'язання:
   а) метод мінімального тарифу;
   б) метод північно-західного кута;
   в) метод Фогеля.
7. Перехід від одного опорного розв'язання до іншого.
8. Перевірка опорного розв'язання на оптимальність.
9. Інші типи задач, що розв'язуються методами транспортної задачі.

Тема 6. Складання рівнянь прямої на площині.

План

1. **Теоретичні відомості**
2. **Завдання для самостійного виконання.**

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.

2.2 Зразок оформлення ІДЗ.

Теоретичні відомості

рівняння прямої за двома точками

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (1)$$

відстань від точки до прямої

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \qquad (2)$$

кут між двома прямими

Для прямих, що задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом	$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$	(3)
Для прямих, що задані загальними рівняннями	$\cos\theta=\pm\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$	(4)
Для прямих, що задані канонічними рівняннями	$\cos\theta=\pm\frac{l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2}}$	(5)

рівняння прямої, паралельної даній

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad (6)$$

де $k=-\frac{A}{B}$ – знаходимо із загального рівняння прямої і умови паралельності прямих.

умови паралельності прямих

Для прямих, що задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом	$k_2=k_1$	(7)
Для прямих, що задані загальними рівняннями	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$	(8)
Для прямих, що задані канонічними рівняннями	$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}$	(9)

рівняння прямої, що перпендикулярна даній

$y - y_0 = k(x - x_0)$, де $k = -\frac{A}{B}$ – знаходимо із загального рівняння прямої і умови перпендикулярності прямих.

умови перпендикулярності прямих

Для прямих, що задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом	$k_2 = -\frac{1}{k_1}$	(10)
Для прямих, що задані загальними рівняннями	$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$	(11)
Для прямих, що задані канонічними рівняннями	$l_1l_2 + m_1m_2 = 0$	(12)

знаходження точки перетину двох прямих

Координати точки перетину двох прямих (якщо вони не паралельні), знаходяться як розв'язок системи: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$.

2. Завдання для самостійного виконання

Індивідуальне домашнє завдання (номер варіанта відповідає номеру у журналі). Відомі координати вершин трикутника ABC . Необхідно:

1. Знайти координати нормального вектора і кутовий коефіцієнт прямої BC;
2. Скласти рівняння прямої AA_1 паралельно BC;
3. Скласти рівняння висоти AH;
4. Скласти рівняння медіани BM;
5. Знайти точку перетину прямих AH і BM, якщо

1	A (2, -2)	B (5, 4)	C (-2, 0)
2	A (-2, 2)	B (-5, -4)	C (2, 0)
3	A (-2, -2)	B (-5, 4)	C (2, 0)
4	A (2, 2)	B (5, -4)	C (-2, 0)
5	A (-2, 2)	B (4, 5)	C (0, -2)
6	A (2, -2)	B (-4, -5)	C (0, 2)
7	A (2, 2)	B (-4, 5)	C (0, -2)
8	A (-2, -2)	B (4, -5)	C (0, 2)
9	A (1, -2)	B (4, 4)	C (-3, 0)

10	A (-1, 2)	B (-4, -4)	C (3, 0)
11	A (-1, -2)	B (-4, 4)	C (3, 0)
12	A (1, 2)	B (4, -4)	C (-3, 0)
13	A (-2, 1)	B (4, 4)	C (0, -3)
14	A (2, -1)	B (-4, -4)	C (0, 3)
15	A (2, 1)	B (-4, 4)	C (0, -3)
16	A (-2, -1)	B (4, -4)	C (0, 3)
17	A (1, 0)	B (0, 3)	C (-5, -2)
18	A (-1, 0)	B (0, -3)	C (5, 2)
19	A (-1, 0)	B (0, 3)	C (5, -2)
20	A (1, 0)	B (0, -3)	C (-5, 2)
21	A (0, 1)	B (3, 0)	C (-2, -5)
22	A (0, -1)	B (-3, 0)	C (2, 5)
23	A (0, -1)	B (3, 0)	C (-2, 5)
24	A (0, 1)	B (-3, 0)	C (2, -5)

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

1. Опрацювати теоретичний матеріал.
2. Оформити роботу в зошиті для самостійних та практичних робіт

2.2 Зразок оформлення індивідуального домашнього завдання

Завдання. Відомі координати вершин трикутника ABC: $A(-1;2)$, $B(3;-1)$, $C(2;-3)$. Необхідно:

1. Знайти координати нормального вектора і кутовий коефіцієнт прямої BC;
2. Скласти рівняння прямої AA_1 паралельно BC;
3. Скласти рівняння висоти AH;
4. Скласти рівняння медіани BM;
5. Знайти точку перетину прямих AH і BM.

Розв’язання:

1. Використовуючи формулу (1), отримаємо $\frac{x-3}{2-3}=\frac{y+1}{-3+1}$ або $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{-2}$. використовуючи властивість пропорції маємо: $-2(x-3)=-1(y+1)$. Розкриємо дужки: $-2x+6=-y-1$ або $2x-y-7=0$.

$\vec{n}=(2;-1)$, $k=-\frac{A}{B}=-\frac{2}{-1}=2$.

2. Із загального рівняння прямої $2x-y-7=0$, знайдемо k_1: $k_1=2$. Із умови паралельності (7), знаходимо k_2: $k_2=k_1=2$. Підставимо координати точки A та значення кутового коефіцієнта у формулу (6), отримаємо:

$y-2=2(x+1) \Rightarrow y-2=2x+2 \Rightarrow 2x-y+4=0$.

3. Із загального рівняння прямої $2x-y-7=0$, знайдемо k_1: $k_1=2$. Із умови перпендикулярності (10), знаходимо k_2: $k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{2}$. Підставимо координати точки A та значення кутового коефіцієнта у формулу (6), отримаємо:

$y-2=\frac{1}{2}(x+1) \Rightarrow 2(y-2)=x+1 \Rightarrow 2y-4=x+1 \Rightarrow x-2y+5=0$.

4. Знайдемо координати середини відрізка AC:

$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$; $\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2-3}{2}=-\frac{1}{2}$.

Використовуючи формулу (1), отримаємо $\frac{x-3}{\frac{1}{2}-3}=\frac{y+1}{-\frac{1}{2}+1}$ або $\frac{x-3}{-\frac{5}{2}}=\frac{y+1}{\frac{1}{2}}$.

$\frac{1}{2}(x-3)=-\frac{5}{2}(y+1) \Rightarrow x-3=-5y-5 \Rightarrow x+5y+2=0$.

5. Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases}x-2y+5=0\\x+5y+2=0\end{cases}$, що складається з рівнянь прямих. Домножимо перше рівняння на (-1) і додамо результат до другого рівняння:

$$
\begin{array}{l}
\quad -x+2y-5=0\\
+\\
\quad x+5y+2=0\\
\hline
\quad 7y-3=0 \Rightarrow y=\frac{3}{7}
\end{array}
$$

Підставивши $y=\frac{3}{7}$ в перше рівняння маємо: $x-2\cdot\frac{3}{7}-5=0 \Rightarrow x=\frac{41}{7}$.

Отже точка перетину даних прямих - $K(\frac{41}{7};\frac{3}{7})$.

Тема 7. Складання рівнянь прямої на площині.

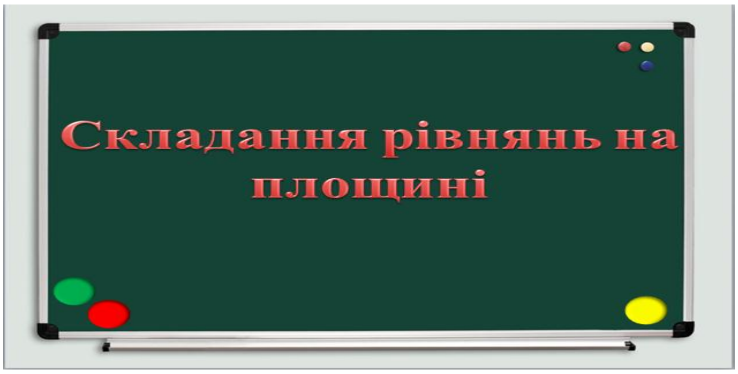
Завдання для самостійного виконання.

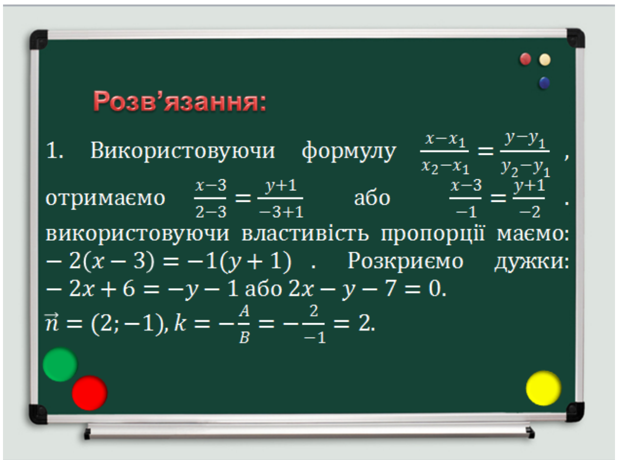
Використовуючи Microsoft Power Point створити проект на тему: «Складання рівнянь на площині».

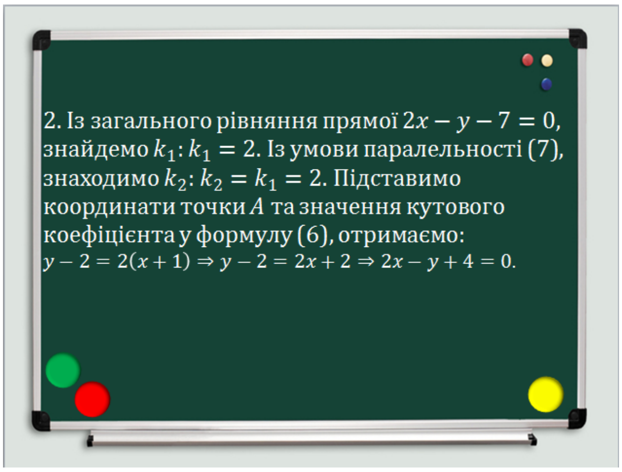
Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.

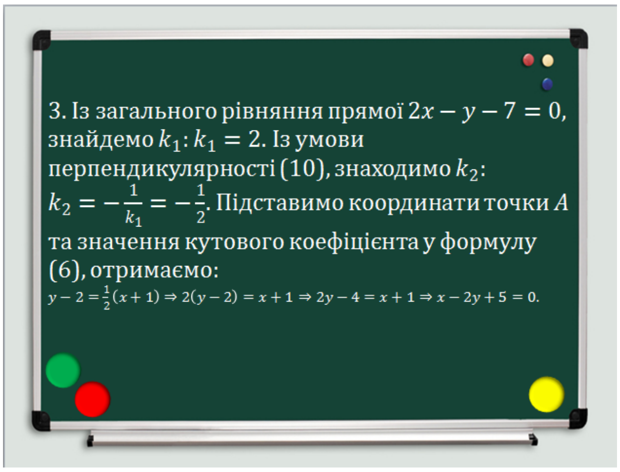
Індивідуальне домашнє завдання з попередньої теми оформити у вигляді презентації Microsoft Power Point.

Зразок оформлення індивідуального домашнього завдання










4. Знайдемо координати середини відрізка AC:
$x = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$; $y = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}$.
Використовуючи формулу $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$,
отримаємо $\frac{x-3}{\frac{1}{2}-3} = \frac{y+1}{-\frac{1}{2}+1}$ або $\frac{x-3}{-\frac{5}{2}} = \frac{y+1}{\frac{1}{2}}$.
$\frac{1}{2}(x-3) = -\frac{5}{2}(y+1) \Rightarrow x-3 = -5y-5 \Rightarrow x+5y+2=0$.


5. Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} x-2y+5=0 \\ x+5y+2=0 \end{cases}$, що складається з рівнянь прямих. Домножимо перше рівняння на (-1) і додамо результат до другого рівняння:
$-x+2y-5=0$
$+$
$x+5y+2=0$
$7y-3=0 \Rightarrow y=\frac{3}{7}$
Підставивши $y=\frac{3}{7}$ в перше рівняння маємо:
$x-2\cdot\frac{3}{7}-5=0 \Rightarrow x=\frac{41}{7}$.
Отже точка перетину даних прямих - $K(\frac{41}{7};\frac{3}{7})$.

Тема 8. Канонічне рівняння еліпса.

План

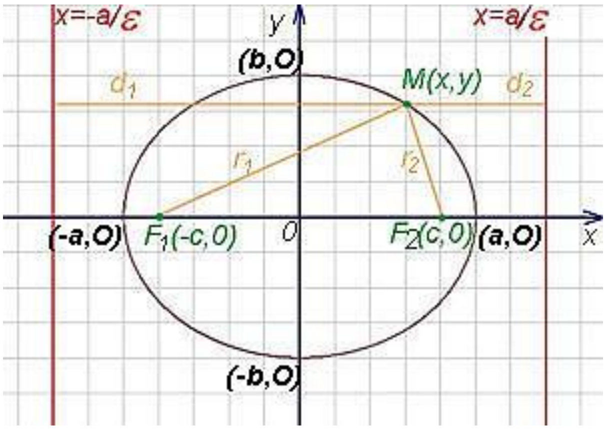
1. **Теоретичні відомості.**

2. Завдання для самостійного виконання.

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.

Теоретичні відомості

Означення. Еліпсом називається множина всіх точок площини, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок є число постійне і дорівнює $2a$.



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	канонічне рівняння еліпса
$\frac{(x+\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y+\beta)^2}{b^2}=1$	канонічне рівняння еліпса, центр якого знаходиться у точці $(\alpha;\beta)$
$O(0;0)$	центр еліпса;
$F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$	фокуси;
MF_1 і MF_2	фокальні радіуси;
$A_1A_2=2a$ a	велика вісь еліпса; велика піввісь;
$B_1B_2=2b$ b	маленька вісь еліпса маленька піввісь
$A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;\ b)$	координати вершин еліпса
$F_1F_2=2c$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$	відстань між фокусами.
$\varepsilon=\frac{c}{a}<1$	ексцентриситет
$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$	рівняння директрис

властивості еліпса

- ✓ еліпс має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії (головні осі еліпса) і центр симетрії (центр еліпса). Якщо еліпс задано канонічним рівнянням, то його головними осями являються осі координат, а центром – початок координат;
- ✓ весь еліпс міститься всередині прямокутника;
- ✓ ексцентриситет еліпса $0 < \varepsilon < 1$;
- ✓ директриси еліпса розташовані зовні еліпса.

2. Завдання для самостійного виконання

Тестові завдання

Варіант 1

1. Еліпсом називається множина точок площини, для кожної з яких:

а) відстань до заданої точки дорівнює відстані до заданої прямої;	б) сума відстаней до двох фіксованих точок є величина стала;	в) добуток відстаней до двох фіксованих точок є величина стала;	г) модуль різниці відстаней до двох фіксованих точок є величина стала;	д) інша відповідь.

2. Канонічне рівняння еліпса має наступний вигляд:

а) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;	б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;	в) $y^2=2px$;	г) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	д) інша відповідь.

3. Ексцентриситетом еліпса називається число:

а) $\frac{b}{a}$;	б) $\frac{a}{c}$;	в) $\frac{b}{c}$;	г) $\frac{c}{a}$;	д) інша відповідь.

4. Для еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ половина віддалі між фокусами c дорівнює:

а) $c=\sqrt{a^2+b^2}$;	б) $c=\sqrt{a^2-b^2}$;	в) $c=a-b$;	г) $c=a+b$;	д) інша відповідь.

5. Центром еліпса називається:

а) центр перетину осей;	б) вісь, на якій лежать фокуси;	в) центра немає;	г) на директрисі;	д) інша відповідь.

6. Скласти канонічне рівняння еліпса з ексцентриситетом $\frac{3}{5}$, що проходить через точку $(0;8)$.

а) $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{16}=1$;	б) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{8}=1$;	в) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$;	г) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{64}=1$;	д) інша відповідь.

7. Скласти канонічне рівняння еліпса, мала піввісь якого дорівнює 15, а лівий фокус міститься в точці $F_1(-10;0)$.

а) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{225}=1;$	б) $\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{225}=1;$	в) $\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{225}=1$	г) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{225}=1$	д) інша відповідь.

8. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки $A(3;0)$, $B\left(2;\ \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1;$	б) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{1}=1;$	в) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$	г) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$	д) інша відповідь.

9. Скласти канонічне рівняння еліпса, велика вісь якого дорівнює 50, а ексцентриситет $\frac{3}{5}$.

а) $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{16}=1;$	б) $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{100}=1;$	в) $\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{400}=1$	г) $\frac{x^2}{900}+\frac{y^2}{225}=1$	д) інша відповідь.

10. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки $A(-3;0)$, $B\left(1;\frac{\sqrt{40}}{3}\right)$.

а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1;$	б) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1;$	в) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{25}=1$	г) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$	д) інша відповідь.

Варіант 2

1. Еліпсом називається множина точок площини, для кожної з яких:

а) відстань до заданої точки дорівнює відстані до заданої прямої;	б) сума відстаней до двох фіксованих точок є величина стала;	в) добуток відстаней до двох фіксованих точок є величина стала;	г) модуль різниці відстаней до двох фіксованих точок є величина стала;	д) інша відповідь.

2. Канонічне рівняння еліпса має наступний вигляд:

а) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$	б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$	в) $y^2=2px$;	г) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	д) інша відповідь.

3. Ексцентриситетом еліпса називається число:

а) $\frac{b}{a}$;	б) $\frac{a}{c}$;	в) $\frac{b}{c}$;	г) $\frac{c}{a}$;	д) інша відповідь.

4. Для еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ половина віддалі між фокусами c дорівнює:

а) $c=\sqrt{a^2+b^2}$;	б) $c=\sqrt{a^2-b^2}$;	в) $c=a-b$;	г) $c=a+b$;	д) інша відповідь.

5. Центром еліпса називається:

а) центр перетину осей;	б) вісь, на якій лежать фокуси;	в) центра немає;	г) на директрисі;	д) інша відповідь.

6. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точку $(-5;0)$, ексцентриситет якого дорівнює $\frac{\sqrt{21}}{5}$.

а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$;	б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$;	в) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$	г) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$	д) інша відповідь.

7. Скласти канонічне рівняння еліпса, велика піввісь якого дорівнює 4, а правий фокус міститься в точці $F_2(3;0)$.

а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$;	б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$;	в) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$	г) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$	д) інша відповідь.

8. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки $A(0;-2)$ $B\left(\frac{\sqrt{15}}{2};1\right)$.

а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$;	б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$;	в) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$	г) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{4}=1$	д) інша відповідь.

9. Скласти канонічне рівняння еліпса з ексцентриситетом $\frac{7}{8}$, який проходить через точку $A(8;0)$.

а) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$;	б) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$;	в) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{15}=1$	г) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$	д) інша відповідь.

10. Скласти канонічне рівняння еліпса, велика вісь якого дорівнює 12, а лівий фокус міститься в точці $F_1(-4;0)$.

а) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{128}=1$;	б) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$;	в) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{100}=1$	г) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$	д) інша відповідь.

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

1. Опрацювати теоретичний матеріал.
2. Тестові завдання оформити в зошиті для самостійних та практичних робіт. Вони складаються з п’яти теоретичних питань та п’яти практичних завдань. При оформленні роботи треба виконати необхідні обчислення у зошиті.

Критерії оцінки тестової роботи

Питання	Бали	Примітка
1 – 5	15	Кожна правильна відповідь 3 бали
6 – 10	35	Кожна правильна відповідь 7 балів

Максимальний бал за роботу – **50 балів**

Шкала переводу балів в оцінку

Оцінка	**Число балів, необхідне для отримання оцінки**

« **5**» (відмінно)	44 - 50
« **4**» (добре)	36 - 43
« **3**» (задовільно)	22 - 29
« **2** « (незадовільно)	менше 22

Тема 9. Канонічне рівняння гіперболи.

План

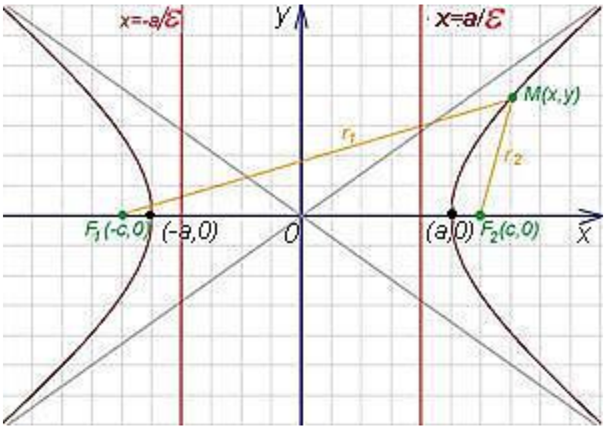
1. Теоретичні відомості.

2. Завдання для самостійного виконання.

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.

Теоретичні відомості

Означення. Гіперболою називається множина всіх точок площини, для яких модуль різниці відстаней до двох фіксованих точок площини є постійне число, причому менше за відстань між фіксованими точками і дорівнює $2a$.



$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	канонічне рівняння гіперболи
$O(0;0)$	центр гіперболи
$F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$	фокуси
$A_1A_2=2a$ a	дійсна вісь гіперболи; дійсна піввісь
$B_1B_2=2b$ b	уявна вісь гіперболи уявна піввісь
$A_1(-a;0),\ A_2(a;0)$	координати вершин гіперболи
$F_1F_2=2c,\ c=\sqrt{a^2+b^2}$	відстань між фокусами
$\varepsilon=\frac{c}{a}>1$	ексцентриситет
$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$	рівняння директрис
$y=\pm\frac{b}{a}x$	рівняння асимптот

Властивості гіперболи

- ✓ гіпербола має дві осі симетрії (головні осі гіперболи) та центр симетрії (центр гіперболи);

- ✓ спряжена гіпербола, визначається канонічним рівнянням $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$, для якого змінюються місцями дійсна та уявна вісь;
- ✓ ексцентриситет гіперболи $\varepsilon > 1$;

2. Завдання для самостійного виконання

Тестові завдання

Варіант 1

1. Гіперболою називається множина точок площини, для кожної з яких:

а) відстань до заданої точки дорівнює відстані до заданої прямої;	б) сума відстаней до двох фіксованих точок є величина стала;	в) добуток відстаней до двох фіксованих точок є величина стала;	г) модуль різниці відстаней до двох фіксованих точок є величина стала;	д) інша відповідь.

2. Канонічне рівняння гіперболи має наступний вигляд:

а) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;	б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;	в) $y^2=2px$;	г) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	д) інша відповідь.

3. Рівняння асимптот гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ має вигляд (ε – ексцентриситет):

а) $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$;	б) $y=\pm\varepsilon\cdot x$;	в) $y=\pm\frac{a}{b}x$;	г) $y=\pm\frac{b}{a}x$;	д) інша відповідь.

4. Рівняння директрис гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ має вигляд (ε – ексцентриситет):

а) $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$;	б) $y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$;	в) $y=\pm\frac{b}{a}x$;	г) $y=\pm\varepsilon\cdot x$;	д) інша відповідь.

5. Для гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ половина віддалі між фокусами c дорівнює:

а) $c=a+b$;	б) $c=\sqrt{a^2-b^2}$;	в) $c=\sqrt{a^2+b^2}$;	г) $c=\sqrt{b^2-a^2}$;	д) інша відповідь.

6. Скласти канонічне рівняння гіперболи, дійсна піввісь якої дорівнює 13, а ексцентриситет складає $\frac{14}{13}$.

а) $\frac{x^2}{169}-\frac{y^2}{27}=1$;	б) $\frac{x^2}{169}-\frac{y^2}{25}=1$;	в) $\frac{x^2}{169}-\frac{y^2}{49}=1$;	г) $\frac{x^2}{169}-\frac{y^2}{100}=1$;	д) інша відповідь.

7. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо рівняння асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x$ та ексцентриситет $\frac{5}{4}$.

а) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$;	б) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$;	в) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$	г) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$	д) інша відповідь.

8. Скласти канонічне рівняння гіперболи, яка проходить через точки $A(6;0)$, $B(-2\sqrt{2};1)$.

а) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{4}=1$;	б) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$;	в) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$	г) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{5}=1$	д) інша відповідь.

9. Скласти канонічне рівняння гіперболи, мала піввісь якої дорівнює 4, а лівий фокус міститься в точці $F_1(-11;0)$.

а) $\frac{x^2}{105}-\frac{y^2}{16}=1$;	б) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{16}=1$;	в) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{4}=1$	г) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$	д) інша відповідь.

10. Скласти канонічне рівняння гіперболи, дійсна піввісь якої дорівнює 9, а ексцентриситет якої дорівнює $\frac{4}{3}$.

а) $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{64}=1$;	б) $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{49}=1$;	в) $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{63}=1$	г) $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{36}=1$	д) інша відповідь.

Варіант 2

1. Гіперболою називається множина точок площини, для кожної з яких:

а) відстань до заданої точки дорівнює відстані до заданої прямої;	б) сума відстаней до двох фіксованих точок є величина стала;	в) добуток відстаней до двох фіксованих точок є величина стала;	г) модуль різниці відстаней до двох фіксованих точок є величина стала;	д) інша відповідь.

2. Канонічне рівняння гіперболи має наступний вигляд:

а) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;	б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;	в) $y^2=2px$;	г) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	д) інша відповідь.

3. Рівняння асимптот гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ має вигляд (ε – ексцентриситет):

а) $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$;	б) $y=\pm\varepsilon\cdot x$;	в) $y=\pm\frac{a}{b}x$;	г) $y=\pm\frac{b}{a}x$;	д) інша відповідь.

4. Рівняння директрис гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ має вигляд (ε – ексцентриситет):

а) $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$;	б) $y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$;	в) $y=\pm\frac{b}{a}x$;	г) $y=\pm\varepsilon\cdot x$;	д) інша відповідь.

5. Для гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ половина віддалі між фокусами c дорівнює:

а) $c=a+b$;	б) $c=\sqrt{a^2-b^2}$;	в) $c=\sqrt{a^2+b^2}$;	г) $c=\sqrt{b^2-a^2}$;	д) інша відповідь.

6. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо рівняння асимптот $y=\pm\frac{x}{3}$, а велика вісь дорівнює 6.

а) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1$;	б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{1}=1$;	в) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$	г) $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{36}=1$	д) інша відповідь.

7. Скласти канонічне рівняння гіперболи, яка проходить через точки $A\left(\sqrt{\frac{32}{3}};1\right)$, $B(8;0)$.

а) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$;	б) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{25}=1$;	в) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{3}=1$	г) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{9}=1$	д) інша відповідь.

8. Скласти канонічне рівняння гіперболи, мала піввісь якої дорівнює 3, а правий фокус міститься в точці $F_1(7;0)$.

а) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{9}=1$; б) $\frac{x^2}{40}-\frac{y^2}{9}=1$; в) $\frac{x^2}{58}-\frac{y^2}{9}=1$ г) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ д) інша відповідь.

9. Скласти канонічне рівняння гіперболи, велика піввісь якої дорівнює 5, а ексцентриситет складає $\frac{7}{5}$.

а) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$; б) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$; в) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ г) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ д) інша відповідь.

10. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо рівняння асимптот $y=\pm\frac{x}{2}$, а ексцентриситет дорівнює $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

а) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$; б) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$; в) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ г) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$ д) інша відповідь.

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

1. Опрацювати теоретичний матеріал.
2. Тестові завдання оформити в зошиті для самостійних та практичних робіт. Вони містять п'ять теоретичних питань та п'ять практичних завдань. При оформленні роботи треба виконати необхідні обчислення у зошиті.

Критерії оцінки тестової роботи

Питання	Бали	Примітка
1 – 5	15	Кожна правильна відповідь 3 бали
6 – 10	35	Кожна правильна відповідь 7 балів

Максимальний бал за роботу – **50 балів**

Шкала переводу балів в оцінку

Оцінка	**Число балів, необхідне для отримання оцінки**
« **5**» (відмінно)	44 - 50
« **4**» (добре)	36 - 43
« **3**» (задовільно)	22 - 29
« **2** « (незадовільно)	менше 22

Тема 10. Канонічне рівняння параболи.

План

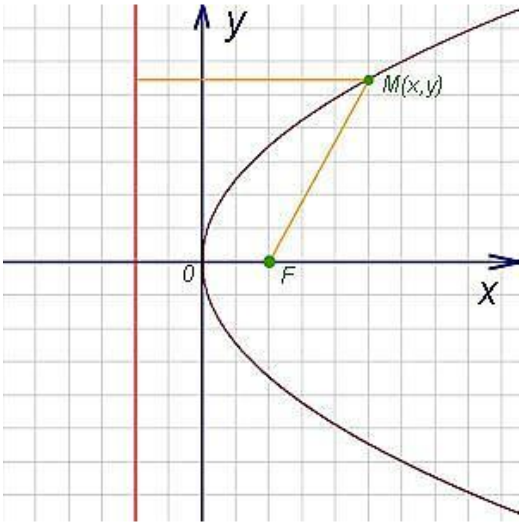
1. Теоретичні відомості.

2. Завдання для самостійного виконання.

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.

Теоретичні відомості

Означення. Параболою називається множина всіх точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки і фіксованої прямої.



$y^2 = 2px$	канонічне рівняння параболи
$(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha)$	канонічне рівняння параболи, якщо вершина знаходиться у точці $(\alpha;\beta)$
$O(0;0)$	центр параболи
$F\left(\frac{p}{2};0\right)$	фокус
$x = -\frac{p}{2}$	рівняння директриси

властивості параболи

- ✓ парабола має вісь симетрії (вісь параболи). Точка перетину параболи з віссю називається вершиною параболи. Якщо парабола задана канонічним рівнянням, то її віссю являється вісь $0x$, а вершиною – початок координат.
- ✓ вся парабола розташована у правій півплощині площини $0xy$;

2. Завдання для самостійного виконання

Тестові завдання

Варіант 1

1. Параболою називається множина точок площини, для кожної з яких:

а) відстань до заданої точки дорівнює відстані до заданої прямої;	б) сума відстаней до двох фіксованих точок є величина стала;	в) добуток відстаней до двох фіксованих точок є величина стала;	г) модуль різниці відстаней до двох фіксованих точок є величина стала;	д) інша відповідь.

2. Канонічне рівняння параболи має наступний вигляд:

а) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;	б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;	в) $y^2 = 2px$;	г) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	д) інша відповідь.

3. Для параболи $y^2 = 2px$ параметр p – це:

а) подвоєна віддаль від фокуса до директриси;	б) віддаль від вершини до фокуса;	в) віддаль від вершини до директриси;	г) віддаль від фокуса до директриси;	д) інша відповідь.

4. Нехай ε – ексцентриситет лінії другого порядку. Які з наведених нижче тверджень є правильними:
1) для еліпса $\varepsilon > 1$;
2) для кола $\varepsilon = 1$;
3) для гіперболи $\varepsilon > 1$;
4) для кола $\varepsilon = 0$.

а) 2 і 3;	б) 1 і 4;	в) 3 і 4;	г) 1 і 2;	д) інша відповідь.

5. Яка з наступних ліній не має центра симетрії:

а) гіпербола;	б) парабола;	в) коло;	г) еліпс;	д) інша відповідь.

6. Скласти канонічне рівняння параболи симетричної щодо осі Oy, якщо рівняння директриси $y = 9$.

а) $x^2 = -18y$;	б) $x^2 = 9y$;	в) $x^2 = -36y$;	г) $x^2 = 18y$;	д) інша відповідь.

7. Скласти канонічне рівняння параболи яка проходить через точку $(4; 1)$ і симетрична відносно осі Oy.

а) $x^2 = 16y$;	б) $x^2 = -8y$;	в) $x^2 = 8y$;	г) $x^2 = -16y$;	д) інша відповідь.

8. Скласти канонічне рівняння параболи симетричної щодо осі Ox, якщо рівняння директриси $x = -4$.

а) $y^2 = 8x$;	б) $y^2 = -8x$;	в) $y^2 = 16x$;	г) $y^2 = -16x$;	д) інша відповідь.

9. Скласти канонічне рівняння параболи яка проходить через точку $(4;-8)$ і симетрична відносно осі Ox.

а) $y^2 = 16x$;	б) $y^2 = 8x$;	в) $y^2 = -32x$;	г) $y^2 = 24x$;	д) інша відповідь.

10. Скласти рівняння кола, яке проходить через точку $(2;-5)$ і має центр, що співпадає з вершиною параболи $x^2 = -2(y+1)$

а) $x^2 + (y-1)^2 = 40$;	б) $x^2 + (y+1)^2 = 20$;	в) $x^2 + (y-1)^2 = 36$	г) $x^2 + (y+1)^2 = 25$	д) інша відповідь.

Варіант 2

1. Параболою називається множина точок площини, для кожної з яких:

а) відстань до заданої точки дорівнює відстані до заданої прямої;	б) сума відстаней до двох фіксованих точок є величина стала;	в) добуток відстаней до двох фіксованих точок є величина стала;	г) модуль різниці відстаней до двох фіксованих точок є величина стала;	д) інша відповідь.

2. Канонічне рівняння параболи має наступний вигляд:

а) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;	б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;	в) $y^2 = 2px$;	г) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	д) інша відповідь.

3. Для параболи $y^2 = 2px$ параметр p – це:

а) подвоєна віддаль від фокуса до директриси;	б) віддаль від вершини до фокуса;	в) віддаль від вершини до директриси;	г) віддаль від фокуса до директриси;	д) інша відповідь.

4. Нехай ε – ексцентриситет лінії другого порядку. Які з наведених нижче тверджень є правильними:
1) для еліпса $\varepsilon > 1$;
2) для кола $\varepsilon = 1$;
3) для гіперболи $\varepsilon > 1$;
4) для кола $\varepsilon = 0$.

а) 2 і 3;	б) 1 і 4;	в) 3 і 4;	г) 1 і 2;	д) інша відповідь.

5. Яка з наступних ліній не має центра симетрії:

а) гіпербола;	б) парабола;	в) коло;	г) еліпс;	д) інша відповідь.

6. Скласти канонічне рівняння параболи симетричної щодо осі Oy, якщо рівняння директриси $y = -1$.

а) $x^2 = 2y$;	б) $x^2 = -y$;	в) $x^2 = 4y$;	г) $y^2 = 2x$;	д) інша відповідь.

7. Скласти канонічне рівняння параболи, яка проходить через точку $(4; -10)$ і симетрична відносно осі Oy.

а) $x^2 = \frac{4}{3}y$;	б) $x^2 = -\frac{8}{5}y$;	в) $x^2 = -\frac{8}{3}y$;	г) $y^2 = -\frac{4}{3}x$;	д) інша відповідь.

8. Скласти канонічне рівняння параболи симетричної щодо осі Ox, якщо рівняння директриси $x = 6$.

а) $y^2 = 6x$;	б) $y^2 = -12x$;	в) $y^2 = -24x$;	г) $y^2 = 18x$;	д) інша відповідь.

9. Скласти канонічне рівняння параболи, яка проходить через точку $(-5; 10)$ і симетрична відносно осі Ox.

а) $y^2 = 10x$;	б) $y^2 = -20x$;	в) $y^2 = 20x$;	г) $y^2 = -10x$;	д) інша відповідь.

10. Яку лінію визначає рівняння $x^2 + 4x - 4y + 8 = 0$.

а) парабола $(x-1)^2 = 4(y-1)$ з вершиною $C(1; -2)$, параметр $p = 2$;	б) коло $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$ з центром $C(-2;\ 1)$, $R = 2$;	в) парабола $(x+1)^2 = 4(y-1)$ з вершиною $C(-2; 1)$, параметр $p = 2$;	г) коло $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ з центром у $C(-1;\ 2)$, $R = 4$;

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

1. Опрацювати теоретичний матеріал.

2. Тестові завдання оформити в зошиті для самостійних та практичних робіт. Вони містять п’ять теоретичних питань та п’ять практичних завдань. При оформленні роботи треба виконати необхідні обчислення у зошиті.

Критерії оцінки тестової роботи

Питання	Бали	Примітка
1 – 5	15	Кожна правильна відповідь 3 бали
6 – 10	35	Кожна правильна відповідь 7 балів

Максимальний бал за роботу – **50 балів**

Шкала переводу балів в оцінку

Оцінка	Число балів, необхідне для отримання оцінки
« **5**» (відмінно)	44 - 50
« **4**» (добре)	36 - 43
« **3**» (задовільно)	22 - 29
« **2** « (незадовільно)	менше 22

Тема 11. Обчислення границь функції за допомогою алгебраїчних перетворень.

План

1. Теоретичні відомості.

2. Завдання для самостійного виконання.

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.

2.2 Зразок оформлення ІДЗ.

Теоретичні відомості

Число b називається границею функції $f(x)$ при x, прямуючому до a, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що при всіх $x \neq a$, які задовольняють нерівність $|x - a| < \delta$, буде виконуватися нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Обчислення границі функції $f(x)$ слід починати з підстановки граничного значення аргументу $x = a$, (a – число або один із символів ∞, $+\infty$, $-\infty$) у вираз, що визначає функцію. При цьому приходиться мати справу з двома суттєво різними типами прикладів.

І. Якщо основна елементарна функція визначена в граничній точці $x = a$, то

$$\lim_{x \to a} f(x) = f\left(\lim_{x \to a} x\right) = f(a)$$

та мають місце основні теореми, на яких базується обчислення границь елементарних функцій.

Якщо C - постійна величина, то $\lim_{x \to a} C = C$.

Якщо C - постійна величина, то $\lim_{x \to a} Cf(x) = C \cdot \lim_{x \to a} f(x)$.

Якщо існують кінцеві границі $\lim_{x \to a} f_1(x)$ та $\lim_{x \to a} f_2(x)$, то:

$$\lim_{x \to a}(f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim_{x \to a} f_1(x) \pm \lim_{x \to a} f_2(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x)\cdot \lim_{x\to a} f_2(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f_1(x)}{\lim_{x\to a} f_2(x)}$$

II. Функція $f(x)$ в граничній точці $x = a$ не визначена. Тоді обчислення границі потребує у кожному випадку індивідуального підходу. В одних випадках (більш простих) питання зводиться до застосування теорем про властивості нескінченно малих та нескінченно великих функцій і зв'язок між ними.

В більш складних випадках знаходження границі зводиться до розкриття невизначеностей вигляду $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0.

При розкритті невизначеностей можуть бути використані такі прийоми:

- ✓ Скорочення дробу на критичний множник $(x = a)^{\alpha}$ при $x \to a$;
- ✓ Звільнення від ірраціональності в чисельнику або знаменнику дробу;
- ✓ Розкладання многочленів на лінійні множники або квадратичні множники при $x \to a$, $(a \neq \infty)$.

При розкладанні на множники також використовують формули скороченого множення, а також формулу розкладання на множники квадратного тричлена:

$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$	різниця квадратів
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	квадрат суми (різниці)
$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\cdot(a^2 \mp ab + b^2)$	сума (різниця) кубів
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$	розкладання квадратного тричлена

Приклад. Обчислити границі, використовуючи алгебраїчні перетворення:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2 - 2x}{2x^2 - 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}}$.

Розв'язання:

а) $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{x(3x-2)}{x(2x-5)} = \lim_{x\to 0}\frac{3x-2}{2x-5} = \frac{3\cdot 0-2}{2\cdot 0-5} = \frac{2}{5}$

б) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}} = \frac{0}{0}$; помножимо чисельник та знаменник на спряжений до знаменника множник $\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x}\right)}{\left(\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}\right)\cdot\left(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{-2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{-2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{-2} = -\sqrt{5}.$$

2. Завдання для самостійного виконання

Індивідуальне домашнє завдання (номер варіанта відповідає номеру у журналі)

Обчислити границі:

Варіант 1

а) $\lim\limits_{x\to 1}(x^4-2x+1)$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2-1}{5x^3-4}$.

Варіант 2

а) $\lim\limits_{x\to 0}(x^5+2x-1)$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x-5}{x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+8x-1}{2x^3+2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-1}{5x^2-1}$.

Варіант 3

а) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3+2x+4)$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-4x-5}{x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x+11}{2x^2-2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{5x^3+4}$.

Варіант 4

а) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^3-2x+8)$; б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-36}{x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-4}{x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2+4}{2x^4-2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2-4}{5x^2-1}$.

Варіант 5

а) $\lim\limits_{x\to 3}(x^3-5x+5)$; б) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2-36}{x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+6x+5}{x+5}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x-10}{3x^3+5}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x^2-1}{6x^3-4}$.

Варіант 6

а) $\lim\limits_{x\to-1}(3x^4-2x+11)$; б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2-25}{x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-7x+6}{x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+7x^3+10}{5x^5-3}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+3x^2-6}{5x^2-4}$.

Варіант 7

а) $\lim\limits_{x\to3}(x^3-5x-1)$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x^2-5x-6}{x-6}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-x+6}{4x^4+7}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+3x^2+8}{2x^3+4}$.

Варіант 8

а) $\lim\limits_{x\to2}(x^5-2x-1)$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-27}{x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+5x-6}{x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}5\dfrac{x^3-x+6}{4x^4+7}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+3x^2+8}{2x^3+4}$.

Варіант 9

а) $\lim\limits_{x\to2}(3x^3-4x+1)$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+27}{x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-8x+7}{x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x+9}{2x-3}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^2-1}{5x^4+7}$.

Варіант 10

а) $\lim\limits_{x\to-2}(x^4-8x+4)$; б) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-49}{x-7}$; в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+7x+6}{x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-10}{10x^2+3}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+5x^2-4}{9x^3+4}$.

Варіант 11

а) $\lim\limits_{x\to 1}(x^5 - 2x - 1)$; б) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x^2 - 49}{x + 7}$; в) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2 - 6x - 7}{x - 7}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3 + 2x - 1}{2x^3 + x - 2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3 + 5x^2 - 1}{x^2 - 6}$.

Варіант 12

а) $\lim\limits_{x\to 1}(5x^4 - x)$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2 - 64}{x - 8}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 + 6x - 7}{x - 1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2 - 7x + 15}{x^2 - 2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x^2 - x + 4}$.

Варіант 13

а) $\lim\limits_{x\to 3}(x^3 - 5x + 5)$; б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2 - 36}{x + 6}$; в) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2 + 6x + 5}{x + 5}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3 + x - 10}{3x^3 + 5}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3 + 4x^2 - 1}{6x^3 - 4}$.

Варіант 14

а) $\lim\limits_{x\to 3}(4x^3 - x + 1)$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3 - 64}{x - 4}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2 + 8x + 7}{x + 1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3 - x + 1}{x^3 - 8x + 1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4 - x^2 - 4}{x^2 + 4x + 1}$.

Варіант 15

а) $\lim\limits_{x\to 3}(x^4 - 3x + 1)$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2 + 64}{x + 4}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 + 2x - 8}{x - 2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5 - x^3 + 15}{8x^5 - 2x + 1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3 - 5x^2 + 4}{3x^2 - 2x + 4}$.

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

1. Опрацювати теоретичний матеріал.
2. Оформити роботу в зошиті для самостійних та практичних робіт.

2.2 Зразок оформлення індивідуального домашнього завдання

Завдання. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to -1}(x^5-7x+10)$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+9x-10}{x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x+15}{3x-5}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+5x-9}{3x-1}$.

Розв'язання:

а) $\lim_{x\to -1}(x^5-7x+10)=(-1)^5-7(-1)+10=-1+7+10=16.$

б) $\lim_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x-4}=\frac{0}{0}$ (скористаємося формулою різниця кубів)

$\lim_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x^2+4x+16)=4^2+4\cdot 4+16=48.$

в) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+9x-10}{x-1}=\frac{0}{0}$ (формула розкладання на множники квадратного тричлена)

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+9x-10}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+10)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+10)=1+10=11.$

г) $\lim_{x\to\infty}\frac{11x+15}{3x-5}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(11+\frac{15}{x}\right)}{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}=\frac{11}{3}.$

д) $\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+5x-9}{3x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(9+\frac{5}{x}-\frac{9}{x^2}\right)}{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x}{3}=\lim\limits_{x\to\infty}3x=\infty.$

Тема 12. Обчислення границь функції за допомогою «визначних» границь.

План

1. **Теоретичні відомості.**
2. **Завдання для самостійного виконання.**

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.

2.2 Зразок оформлення ІДЗ.

Теоретичні відомості

визначні границі

Особливість даних границь полягає в тому, що їх не потрібно обчислювати, вони вже давно пораховані за нас. Нам тільки потрібно їх впізнати і підставити в потрібне місце вже відомий результат. Визначні границі значно спрощують обчислення, не дарма ж вони названі визначними.

Визначних границь існує декілька, але самими відомими являються перша та друга визначна границя. Вони мають широке застосування та з їх допомогою можна знаходити інші границі.

Першою визначною границею називається границя відношення синуса нескінченно малої дуги до тієї ж дуги, що виражена в радіанній мірі:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Приведена вище рівність основана на еквівалентності нескінченно малих $\sin x \sim x$. З першої визначної границі можна зробити пару наслідків:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

Друга визначна границя допомагає позбавлятися від невизначеності вигляду 1^{∞} і виглядає він так:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

2. Завдання для самостійного виконання

Індивідуальне домашнє завдання (номер варіанта відповідає номеру у журналі)

Обчислити границі:

1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+3x}{4+3x}\right)^{1-2x}$
2	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 4x}{5x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{12x+1}{12x-1}\right)^{4-3.x}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-2x}{3-2x}\right)^{-x+2}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 10x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-x}{4-x}\right)^{5-3x}$
5	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\operatorname{tg} 5x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-2x}{4-2x}\right)^{8-x}$
6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 6x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-5x}{2-5x}\right)^{1-\frac{x}{5}}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{8x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+2}\right)^{x-1}$
8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\operatorname{arctg} 2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x}\right)^{x+2}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 2x}{1-\cos^2 x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{x}$
10	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{arctg}^2 x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{x}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x^3}{3x^3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$
12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{7x\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{2x}{3}}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-3}{7x+4}\right)^{x}$
13	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\arcsin 4x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7+2x}{2x-3}\right)^{x+4}$
14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}\sin 6x}{\arcsin\operatorname{tg} 5x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-4x}{1-4x}\right)^{x+3}$
15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x+5}$

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

1. Опрацювати теоретичний матеріал.
2. Оформити роботу в зошиті для самостійних та практичних робіт.

2.2 Зразок оформлення індивідуального домашнього завдання

Завдання. Обчислити границі: а) $\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-5x}{\sin 3x}$; б) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$.

Розв'язання:

а) $\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-5x}{\sin 3x}=\frac{0}{0}$

В знаменнику – синус, отже, вираз можна привести до першої визначної границі. Починаємо перетворення: $\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(4x-5)}{\sin 3x}$.

В знаменнику – синус трьох ікс, а в чисельнику тільки один ікс, значить, треба отримати три ікс і в чисельнику, а, коли трійки скоротяться, отримаємо першу визначну границю. Помножимо та поділимо ікс на три:

$\lim_{x\to 0}\frac{x(4x-5)}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x(4x-5)}{3\sin 3x}=1\cdot\frac{4\cdot 0-5}{3}=-\frac{5}{3}$.

б) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=1^\infty$, виконаємо перетворення і скористаємось другою визначною границею:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3/x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^3=e^3$$

Тема 13. Формули диференціювання.

План

1. Теоретичні відомості.

2. Завдання для виконання самостійної роботи.

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.

2.2 Зразок оформлення роботи.

Теоретичні відомості

правила диференціювання

1. $(Cu)' = C(u)'$;

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

Теорема. Якщо функція $y = f(u)$ має похідну в точці u і функція $u = \varphi(x)$ має похідну в точці x, то складена функція $y = f[\varphi(x)]$ також має похідну в точці x, причому

$$y'_x = (f[\varphi(x)])' = f'(u) \cdot \varphi'(x),$$

або скорочено

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Це правило розповсюджується на ланцюжок з будь-якої кількості диференційованих функцій: *похідна складної функції дорівнює добутку похідних функцій, з яких вона складається*.

Згідно даної теореми можна скласти таблицю похідних складених функцій, яка дозволяє швидше знаходити похідні.

Похідні елементарних функцій	Похідні складених функцій
$C' = 0$	
$x' = 1$	
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1 \cdot}{u} u'$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1 \cdot}{u \cdot \ln a} u'$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

2. Завдання для виконання самостійної роботи

Знайти похідні функцій:

Варіант 1

1) $y = (x^2 + 18)\sqrt{x^2 - 9}$

2) $y = \operatorname{ctg}^2(3x - 5)$

3) $y = e^{\sqrt{\ln x}}$

Варіант 2

1) $y = (x^2 + 8)\sqrt{x^2 - 4}$

2) $y = \sin\sqrt{x^2 - x}$

3) $y = \ln(\operatorname{ctg} x)$

Варіант 3

1) $y = \frac{2}{x-1}\sqrt{2x - x^2}$

2) $y = \frac{x}{\cos x}$

3) $y = \sqrt[3]{\ln\left(\sin\frac{x}{x^2+1}\right)}$

Варіант 4

1) $y = \frac{24x^2+7x}{1-x^2}$

2) $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

3) $y = \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} x$

Варіант 5

1) $y = \sqrt[3]{\frac{x^4+8}{2x^2-5}}$

2) $y = \sin\sqrt{1+x+x^2}$

3) $y = \sqrt{\log_4(x^3-5)}$

Варіант 6	1) $y = (2x^2+5)\sqrt{x^2+1}$ 2) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{x}$ 3) $y = (\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} x)^3$
Варіант 7	1) $y = \sqrt{1-3x-2x^2}$ 2) $y = \sin^2(x^3-x^2)$ 3) $y = \operatorname{arctg}\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$
Варіант 8	1) $\frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt[3]{x^2+12}}$ 2) $\operatorname{tg}\frac{x-3}{x+2}$ 3) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$
Варіант 9	1) $y = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x-1}{3x^2-2x+1}$ 2) $y = (1+\cos x)^2$ 3) $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x$
Варіант 10	1) $y = (5x^8+3)\sqrt{x^6-2x}$ 2) $y = \frac{\cos 5x}{\sin x+\cos x}$ 3) $y = e^x \cdot \cos x$
Варіант 11	1) $y = x^4 \cdot (x^2-2)$ 2) $y = x^2 \cdot \sin x$ 3) $y = \arcsin(x^2-1)$
Варіант 12	1) $y = (x^3-3x+5)^{10}$ 2) $y = \cos^{10} x$ 3) $y = \ln(\sin x)$
Варіант 13	1) $y = (2x^3+3)^4$ 2) $y = \operatorname{tg}^5 3x$ 3) $y = e^{\arcsin 2x}$
Варіант 14	1) $y = (x^2+4x) \cdot (\sqrt{x}-3x)$

2) $y = \frac{x}{1-\cos x}$

3) $y = \frac{\arccos x}{x}$

Варіант 15

1) $y = (2x^3 + x)\sqrt{x^2+1}$

2) $y = \sqrt{\cos 2x}$

3) $\frac{\ln x}{x^3 - 2x}$

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

1. Опрацювати теоретичний матеріал теми.
2. Виконати самостійну роботу в зошиті для практичних та самостійних робіт.

2.2 Зразок оформлення роботи

Завдання. Знайти похідні функцій: 1) $y = \sqrt{4x^2 + 12x - 7}$; 2) $y = \sin(7x+3) + 5\cos 2x - 4\cos 3x$; 3) $y = \cos^2 \frac{x}{6}$

Розв'язання:

1) так як функція складна, то використаємо формулу $\left(\sqrt{u}\right)^{/} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u^{/}$, отримаємо: $y^{/} = \left(\sqrt{4x^2 + 12x - 7}\right)^{/} = \frac{1}{2\sqrt{4x^2+12x-7}} \cdot (4x^2 + 12x - 7)^{/}$. В дужках маємо похідну суми, застосувавши до неї формулу $(u \pm v)^{/} = u^{/} \pm v^{/}$, отримаємо: $y^{/} = \frac{1}{2\sqrt{4x^2+12x-7}} \cdot \left((4x^2)^{/} + (12x)^{/} - 7^{/}\right)$. Застосуємо формулу $(Cu)^{/} = C(u)^{/}$ до першого та другого доданків, отримаємо: $y^{/} = \frac{1}{2\sqrt{4x^2+12x-7}} \cdot \left(4(x^2)^{/} + 12(x)^{/} - 7^{/}\right)$. Згідно таблиці похідних простих функцій, отримуємо остаточний результат:
$y^{/} = \frac{8x+12}{2\sqrt{4x^2+12x-7}} = \frac{2(4x+6)}{2\sqrt{4x^2+12x-7}} = \frac{4x+6}{\sqrt{4x^2+12x-7}}$.

2) $y^{/} = (\sin(7x+3) + 5\cos 2x - 4\cos 3x)^{/}$. Згідно формули $(u \pm v)^{/} = u^{/} \pm v^{/}$, маємо: $y^{/} = (\sin(7x+3))^{/} + (5\cos 2x)^{/} - (4\cos 3x)^{/}$. Використавши формули із таблиці похідних складених функцій, отримаємо:

$y^{/} = 7\cos(7x+3) - 10\sin 2x + 12\sin 3x$.

3) $y^{/} = \left(\cos^2 \frac{x}{6}\right)^{/}$. Застосуємо формулу $(u^n)^{/} = n \cdot u^{n-1} \cdot u^{/}$: $y^{/} = 2\cos\frac{x}{6} \cdot \left(\cos\frac{x}{6}\right)^{/}$. А тепер використаємо формулу $(\cos u)^{/} = -\sin u \cdot u^{/}$: $y^{/} = -2\cos\frac{x}{6} \cdot \sin\frac{x}{6} \cdot \left(\frac{x}{6}\right)^{/}$. Для обчислення $\left(\frac{x}{6}\right)^{/}$ скористаємось правилом диференціювання $(Cu)^{/} = C(u)^{/}$ і остаточно отримаємо: $y^{/} = -2\cos\frac{x}{6} \cdot \sin\frac{x}{6} \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}\sin\frac{x}{3}$.

Тема 14. Дослідження функції однієї змінної за допомогою похідної та побудова графіка.

План

1. Теоретичні відомості.

2. Завдання для самостійного виконання.

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.

2.2 Зразок оформлення роботи.

Теоретичні відомості

Загальна схема дослідження функції

1) Знайти область визначення.

2) Перевірити функцію на парність або непарність.

3) Перевірити функцію на періодичність.

4) Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.

5) Знайти критичні точки першого роду, визначити проміжки зростання і спадання функції, знайти точки локального екстремуму.

6) Знайти точки перегину, проміжки опуклості і вгнутості.

7) Знайти асимптоти графіка функції.

8) За одержаними результатами побудувати ескіз графіка функції.

2. Завдання для самостійного виконання

Індивідуальне домашнє завдання (номер варіанта відповідає номеру у журналі). Дослідити функцію та побудувати її графік.

1. $y = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 30$

2. $y = -x^3 - 9x^2 - 24x + 30$

3. $y = -x^3 + 3x^2 + 8$

4. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

5. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 6$

6. $y = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 4$

7. $y = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 1$

8. $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 8$

9. $y = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 53$

10. $y = -x^3 + 9x^2 - 15x + 1$

11. $y = -2x^3 + 21x^2 + 36x - 53$

12. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 9$

13. $y = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$

14. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

15. $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 11$

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

1. Опрацювати теоретичний матеріал теми.
2. Виконати індивідуальне домашнє завдання в зошиті для практичних та самостійних робіт.

2.2 Зразок оформлення індивідуального домашнього завдання

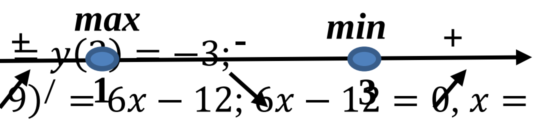
Завдання. Дослідити функцію $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ та побудувати її графік

Розв'язання:

1) функція визначена на всій числовій осі, тобто $D(y) = R$;
2) дана функція не є ні парною, ні непарною;
3) неперіодична;
4) Oy: $x = 0$, $y = -3$; точки перетину з віссю Ox у даному випадку знайти складно;
5) $y^{/} = (x^3 - 6x^2 + 9x - 3)^{/} = 3x^2 - 12x + 9$; $3x^2 - 12x + 9 = 0$;

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

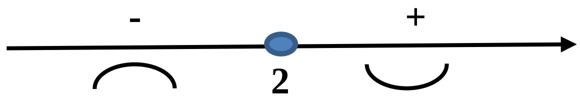
Відмічаємо отримані точки на числовій прямій і досліджуємо функцію на монотонність, а також точки екстремуму:



$y_{max} = y(1) = 1$, $y_{min} = y(3) = -3$;

6) $y^{//} = (3x^2 - 12x + 9)^{/} = 6x - 12$; $6x - 12 = 0$, $x = 2$.

Відмічаємо отримані точки на числовій прямій і досліджуємо функцію на випуклість (угнутість), а також точки перегину:



$(2; -1)$ – точка перегину;

7) графік функції не має асимптот;

8) використовуючи отримані дані, будуємо графік (рис. 1).

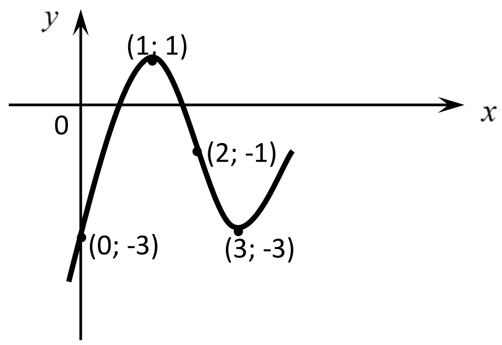


рис. 1

Тема 15. Дослідження функції однієї змінної за допомогою похідної та побудова графіка.

План

1. Теоретичні відомості.

2. Завдання для самостійного виконання.

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.

2.2 Зразок оформлення ІДЗ.

Теоретичні відомості

Загальна схема дослідження функції

1) Знайти область визначення.

2) Перевірити функцію на парність або непарність.

3) Перевірити функцію на періодичність.

4) Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.

5) Знайти критичні точки першого роду, визначити проміжки зростання і спадання функції, знайти точки локального екстремуму.

6) Знайти точки перегину, проміжки опуклості і вгнутості.

7) Знайти асимптоти графіка функції.

8) За одержаними результатами побудувати ескіз графіка функції.

2. Завдання для самостійного виконання

Індивідуальне домашнє завдання (номер варіанта відповідає номеру у журналі)

Дослідити функцію та побудувати її графік.

1.	$y=\dfrac{x+1}{x^3}$;	$y=xe^{-x}+1$;
2.	$y=\dfrac{x^2}{x-1}$;	$y=(2+x)e^{x}-1$;
3.	$y=\dfrac{x^3}{x^3-2}$;	$y=(x-1)e^{-2x}+2$;
4.	$y=\dfrac{-x}{x^3-1}$;	$y=(3x-1)e^{2x}-3$;
5.	$y=\left(\dfrac{2x+3}{x-1}\right)^2$;	$y=(2x+1)e^{2x}+1$;

6.	$y=\frac{3x^3}{x^3+6};$	$y=2xe^x-1;$
7.	$y=\frac{x^2+1}{2x+3};$	$y=(3-x)e^{-x}+3;$
8.	$y=\frac{x^3}{x^2+2x+3};$	$y=(3x+1)e^{-x}+2;$
9.	$y=\frac{16}{x^2(x-4)};$	$y=(1-x)e^{-x}+1;$
10.	$y=\frac{x^2+1}{x-1};$	$y=(2x+1)e^x-1;$
11.	$y=\frac{x^4}{x^3-1};$	$y=(6-3x)e^{2x}+2;$
12.	$y=\frac{x^3}{x^2+1};$	$y=3xe^{-x}+1;$
13.	$y=\frac{-x^2}{(x-2)^2};$	$y=(5x-2)e^{-x}+3;$
14.	$y=\frac{x}{x^3-2};$	$y=(2x-1)e^{2x}+3;$
15.	$y=\frac{4x^3}{x^3-1};$	$y=(4-2x)e^x-2;$
16.	$y=\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x};$	$y=(x+3)e^{-2x}+1;$
17.	$y=\frac{x+3}{x^3};$	$y=-xe^x+2;$
18.	$y=\frac{4x^3+5}{x};$	$y=(2x+5)e^{2x}+1;$

19. $y=\dfrac{x^2}{x^3+1}$; $y=(1-x)e^x+1$;

20. $y=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$; $y=(x+1)e^{-x}+3$;

21. $y=\dfrac{x}{2-x^3}$; $y=(2x+3)e^x+2$;

22. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$; $y=(x-3)e^{-2x}+4$;

23. $y=\dfrac{4x^3}{x^3-1}$; $y=2xe^{-x}-1$;

24. $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$; $y=(2x-1)e^{-x}-2$;

25. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; $y=(x-2)e^{2x}-3$;

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

1. Опрацювати теоретичний матеріал теми.

2. Виконати індивідуальне домашнє завдання в зошиті для практичних та самостійних робіт.

2.2 Зразок оформлення індивідуального домашнього завдання

Завдання 1. Дослідити функцію $y=\frac{x^2-3}{x+1}$ та побудувати її графік.

Розв'язання:

1) Функція визначена для всіх $x\neq-1$.

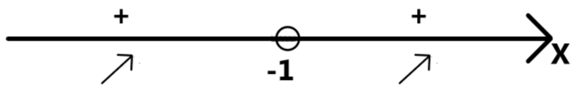
2) Функція ні парна, ні непарна, оскільки $f(x)\neq\pm f(x)$.

3) Функція не є періодичною.

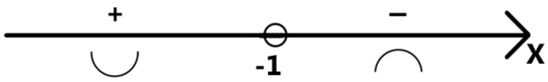
4) Графік функції перетинає вісь абсцис, якщо $y=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$, отже, маємо точки: $(-\sqrt{3};0)$, $(\sqrt{3};0)$.

Графік перетинає вісь ординат, якщо $x=0\Rightarrow y=-3$, маємо точку $(0;3)$.

5) $y^/=\left(\frac{x^2-3}{x+1}\right)^/=\frac{2x(x+1)-(x^2-3)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}=0$, $\begin{cases}x^2+2x+3=0,\\ (x+1)^2\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\in\emptyset,\\ x\neq-1.\end{cases}$



6) $y^{//} = \left(\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}\right)^/ = \frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x+3)}{(x+1)^4} = \frac{-4}{(x+1)^3} = 0, \begin{cases} -4 \neq 0, \\ x \neq -1. \end{cases}$



7) Згідно пункту 1 в точці $x = -1$ функція має розрив.

Оскільки $\lim\limits_{x\to-1-0} \frac{x^2-3}{x+1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-1+0} \frac{x^2-3}{x+1} = -\infty$, то точка $x = -1$ є точкою розриву другого роду типу (нескінченний стрибок).

$x = -1$ – вертикальна асимптота.

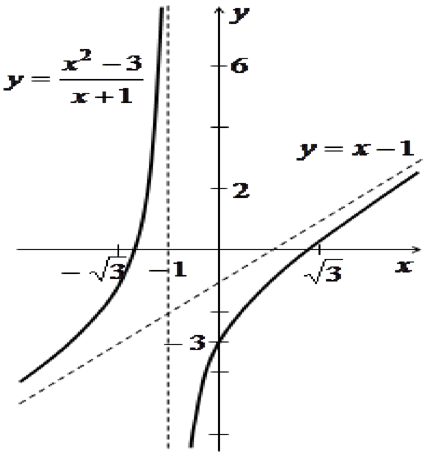
Шукаємо похилі асимптоти

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3}{x(x+1)} = 1,$

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-3}{x+1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-x-3}{x+1} = -1.$

$y = x - 1$ – похила асимптота.

8) У відповідності з проведеним дослідженням будуємо ескіз графіка даної функції



Завдання 2. Дослідити функцію $y = (2x + 1)e^{-2x}$ та побудувати її графік.

Розв'язання:

1) Функція визначена на всій числовій осі.

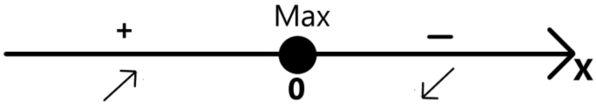
2) Функція ні парна, ні непарна.

3) Функція не є періодичною.

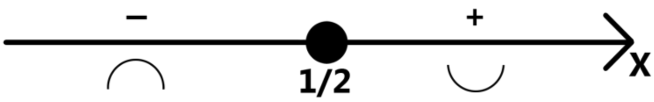
4) Графік функції перетинає вісь абсцис, якщо $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$, отже, маємо точку $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Графік перетинає вісь ординат, якщо $x = 0 \Rightarrow y = 1$, маємо точку $(0; 1)$.

5) $y^/ = ((2x + 1)e^{-2x})^/ = 2e^{-2x} - 2e^{-2x}(2x + 1) = -4xe^{-2x} = 0$, x=0; $y(0) = 1$.



6) $y^{//} = (-4x \cdot e^{-2x})^/ = -4(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) = 4(2x - 1)e^{-2x} = 0$, $x = \frac{1}{2}$.



$y\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$.

7) Функція неперервна на всій числовій осі. Вертикальних асимптот немає.

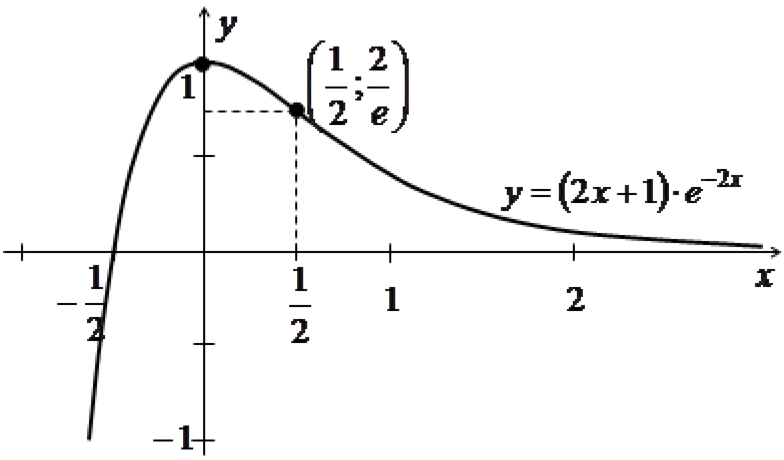
Шукаємо похилі асимптоти:

$k_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(2x+1)e^{-2x}}{x} = +\infty$, отже похилої асимптоти зліва не існує;

$k_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(2x+1)e^{-2x}}{x} = 0$,

$b_2 = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to+\infty} ((2x+1)e^{-2x} - 0) = 0$, отже $y = 0$ – права горизонтальна асимптота.

8) За результатами дослідження будуємо ескіз графіка даної функції:



Тема 16. Формули інтегрування.

План

1. **Теоретичні відомості**
2. **Завдання для самостійного виконання.**

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.

Теоретичний матеріал

1. Основні властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$(\int f(x))^{/}dx = (F(x) + C)^{/} = f(x).$$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

3. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Ці три властивості випливають з означення невизначеного інтеграла. Наступні дві співпадають з відповідними властивостями похідної.

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі інтегралів від кожної функції окремо:

$$\int\big(f(x) + g(x) - h(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx.$$

5. Сталий множник, відмінний від нуля, можна виносити з-під знаку інтеграла:

$$\int a \cdot f(x)dx = a\int f(x)dx\,, a = const \neq 0.$$

6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$– будь-яка неперервно диференційована функція, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Тобто, змінною інтегрування може бути як незалежна змінна, так і довільна неперервно диференційована функція іншої змінної.

наслідки з властивостей

Зауваження 1. Згідно з властивостями 1 і 2 правильність виконання операції інтегрування перевіряється диференціюванням.

Зауваження 2. Властивості 4 і 5 виражають лінійність операції інтегрування.

Зауваження 3. Властивість 6 виражає інваріантність формул інтегрування: будь-яка формула залишається справедливою, якщо змінну інтегрування розглядати як довільну неперервно диференційовану функцію.

таблиця інтегралів

1. $\int dx = x + C;$ 2. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C;$ 4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

5. $\int e^x\,dx = e^x + C;$ 6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$ 8. $\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$ 10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

11. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C;$ 12. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C;$

13. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$ 14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$ 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm p}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm p}\right| + C, (p = const).$

2. Завдання для самостійного виконання

До кожної властивості підібрати приклади. Використовуючи 6 властивість інтегралів створити у Publisher таблицю інтегралів для функцій $y = f(kx + b)$.

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

1. Опрацювати теоретичний матеріал теми.
2. Зробити опорний конспект, виконати завдання в зошиті для практичних та самостійних робіт.

Для створення публікації у Microsoft Publisher можна скористатися наступним опорним конспектом

№ п/п	Операції	Дії користувача
1	Відкрийте Microsoft Publisher.	Пуск → Все программы Microsoft Office → MS Publisher
2	За допомогою майстра створіть нову публікацію Таблиця інтегралів.	Создать → Буклет → Информационный буклет → Загрузить
3	Застосуйте макет розмітки сторінки Заголовок по краю, рисунок знизу.	Параметры: быстрая публикация → Макет Заголовок по краю, рисунок внизу
4	Розташуйте покажчик миші в полі для редагування головної сторінки.	
5	В меню Вигляд зробіть активним меню Головна сторінка.	
6	Встановіть фон сторінки Заливка картинкою довільна.	Формат → Фон
7	Поверніться в меню Вигляд, зніміть помітку зі строки Головна сторінка.	
8	Розташуйте покажчик миші в поле текстової рамки для редагування напису, знищить вміст поля. Вставте текст.	Контекстное меню Изменить текст → текстовый файл (D:\ Мои документы\Таблицы.doc)
9	В поле заголовку ввести «Таблиця інтегралів»	
10	Відредагуйте публікацію за власним бажанням.	

11 Зберегти документ у власній папці.

Тема 17. Наближені методи обчислення невизначеного інтеграла.

План

1. Теоретичні відомості.

2. Завдання для самостійного виконання.

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.

2.2 Зразок оформлення роботи.

Теоретичні відомості

Методи наближеного інтегрування дозволяють знаходити наближені значення визначеного інтегралу від будь-якої неперервної функції з достатньою точністю. Дані чисельні методи базуються на наступному: розглядаючи інтеграл як площу криволінійної трапеції, отримаємо її наближені значення, тобто наближене значення інтегралу. Існує велика кількість функцій, інтеграли від яких не можуть бути виражені через елементарні функції, тоді для знаходження інтегралів від таких функцій використовують слідуючи методи чисельного інтегрування:

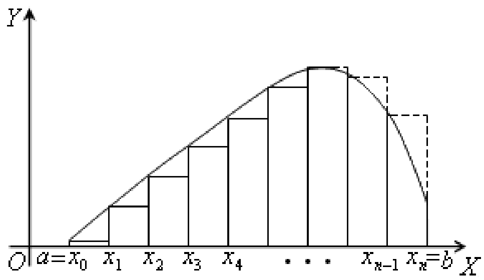
1) метод прямокутників та метод трапецій;

2) метод параболічних трапецій, що називається формулою Сімпсона.

метод прямокутника

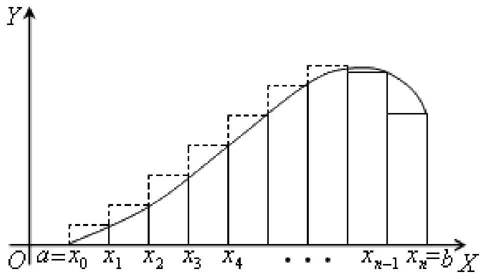
Розділимо інтервал інтегрування $[a;b]$ на n рівних частин (частинні інтервали) та замінимо дану трапецію на ступінчасту фігуру, яка складається з прямокутників, що спираються на частині інтервали, причому висоти цих прямокутників рівні значенню функції в початкових або кінцевих точках частинних інтервалів $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$. Значення площі цієї фігури і буде давати наближене значення шуканого інтегралу: $\int_a^b f(x)dx$. Результат буде більш точним, чим більше взято число частинних інтервалів. Якщо позначити довжини частинних інтервалів як $\frac{b-a}{n} = h$ (крок розбиття) та порахувати всі значення функції y_i(де $i = 0,1,2,3, \dots, n-1$), то отримаємо такі формули:

- ✓ **формула лівих прямокутників**



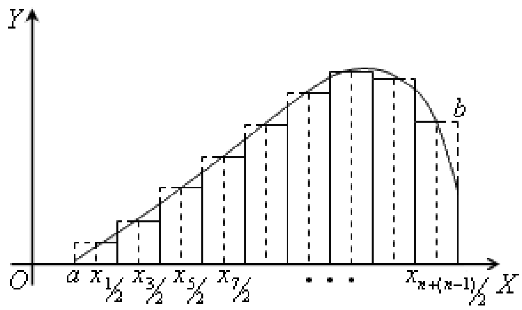
$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,(x_{i+1} - x_i) = h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$$

✓ **формула правих прямокутників**



$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,(x_i - x_{i-1}) = h(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$

✓ **формула серединних прямокутників**



$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i) = h(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \ldots + y_{\frac{2n-1}{2}}$$

або

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h\left(\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + \left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \ldots + \left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right)\right)$$

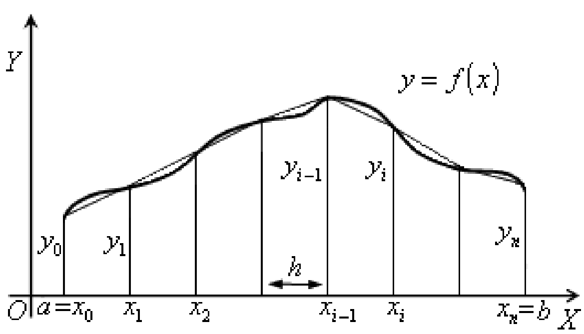
Метод серединних прямокутників є більш точним в порівнянні з методом правих та лівих прямокутників, тому він частіше використовується.

Але на практиці цими формулами користуються рідко, так як взявши замість прямокутників звичайні трапеції, ми практично при тому ж об'ємі роботи, отримаємо більш точний результат.

метод трапецій

Формулу трапецій отримують аналогічно формулі прямокутників: на кожному частинному відрізку криволінійна трапеція замінюється звичайною.

Нехай необхідно обчислити інтеграл $\int_a^b f(x)dx$. Розіб'ємо відрізок інтегрування $[a; b]$ на n рівних частин довжиною $\frac{b-a}{n} = h$. В результаті отримаємо точки $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$



Нехай $y_0, y_1, \ldots, y_n$ – відповідні їм ординати функції. Замінивши криву $f(x)$ ламаною лінією, ланки якої з'єднують кінці ординат. Тоді площа криволінійної трапеції наближено дорівнює сумі площ звичайних трапецій з основами y_i та y_{i+1} і висотою $h = \frac{b-a}{n}$, тобто $I = \int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)$.

Дана формула називається формулою трапецій.

2. Завдання для самостійного виконання

Індивідуальне домашнє завдання (номер варіанта відповідає номеру у журналі)

Обчислити інтеграл, знайти його наближене значення за допомогою формули серединного прямокутника та формули трапеції ($n = 5$). Обчислити похибку наближення.

1.	$\int_1^6 \sqrt{2x-3}\,dx$	**6.**	$\int_1^2 x(1-x^2)^4\,dx$	**11.**	$\int_0^5 (2x-1)^5\,dx$
2.	$\int_0^5 \frac{x}{1+x^2}\,dx$	**7.**	$\int_1^2 (2x-4)^7\,dx$	**12.**	$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx$
3.	$\int_0^3 \sqrt{5x+1}\,dx$	**8.**	$\int_1^6 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx$	**13.**	$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$
4.	$\int_1^5 \frac{x^2}{1-x^3}\,dx$	**9.**	$\int_0^5 \frac{x}{1-3x^2}\,dx$	**14.**	$\int_1^4 \sqrt{8+x}\,dx$
5.	$\int_1^3 \frac{x}{(1+x^2)^3}\,dx$	**10.**	$\int_0^2 \frac{x}{(1+2x^2)^3}\,dx$	**15.**	$\int_1^7 \frac{x}{1-2x^2}\,dx$

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

1. Опрацювати теоретичний матеріал теми.
2. Виконати індивідуальне домашнє завдання в зошиті для практичних та самостійних робіт.

2.2 Зразок оформлення індивідуального домашнього завдання

Завдання. Обчислити інтеграл $\int_1^2 x^2(4-2x^3)\,dx$, знайти його наближене значення за допомогою формули серединного прямокутника та формули трапеції ($n = 5$). Обчислити похибку наближення для методу прямокутників.

Розв'язання:

1) обчислимо інтеграл в аналітичний спосіб:

$$\int_1^2 x^2(4-2x^3)\,dx = \left| \begin{array}{c} 4-2x^3 = t \\ -6x^2dx = dt \Leftrightarrow x^2dx = -\frac{dt}{6} \\ t_1 = 4-2\cdot 1^3 = 2 \\ t_1 = 4-2\cdot 2^3 = -12 \end{array} \right| = \int_2^{-12} -\frac{1}{6}tdt = \left(-\frac{1}{6}\cdot\frac{t^2}{2}\right)\Big|_2^{-12} = -\frac{140}{12} \approx -11{,}67$$

2) Знайдемо h: $h = \frac{2-1}{5} = 0{,}2$. Всі обчислення оформлюємо в таблицю

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$x_i + \frac{h}{2}$	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	
y_i	1,6189	-0,6659	-6,1875	-16,8371	-35,0819	

3) $I \approx 0{,}2(1{,}6189 - 0{,}6659 - 6{,}1875 - 16{,}8371 - 35{,}0819) = 0{,}2(-57{,}1535) = -11{,}4307 \approx -11.43.$

4) Знаходимо похибку: $\delta = \frac{|x-a|}{|a|} \cdot 100\% = \frac{|-11{,}67-(-11{,}43)|}{|-11{,}43|} \cdot 100\% = 2{,}1\%.$

5) обчислимо інтеграл за формулою трапецій: $h = \frac{2-1}{5} = 0{,}2.$ Складемо обчислювальну таблицю.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y_i	2	0,7834	-2,9165	-10,7315	-24,8314	-48

$$I = \int_1^2 x^2(4 - 2x^3)\,dx \approx 0{,}2\left(\frac{2-48}{2} + 0{,}7834 - 2{,}9165 - 10{,}7315 - 24{,}8314\right) \approx -12{,}14.$$

Тема 18. Наближені методи обчислення невизначеного інтеграла.

План

1. Теоретичні відомості.

2. Завдання для самостійного виконання.

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.

2.2 Зразок оформлення роботи.

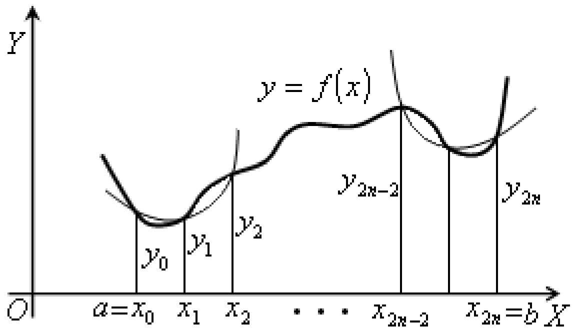
Теоретичні відомості

формула параболічних трапецій (формула Сімпсона)

Серед формул наближеного обчислення інтегралів найвдалішою формулою буде та, яка отримується, якщо через трійки сусідніх точок на графіку функції, що виникають в результаті розбиття відрізка $[a;b]$, проводити параболи з вертикальною віссю, обчислюючи відповідні коефіцієнти a_i, b_i, c_i в рівняннях парабол $y = a_i x^2 + b_i x + c_i$.

Відповідна формула носить назву формули параболічних трапецій або Сімпсона. Цінність її не тільки в точності, але і в зручності оцінки похибки наближеного обчислення.

Якщо замінити графік функції $y = f(x)$ на кожному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$, які отримані після розбиття відрізка інтегрування $[a;b]$ на рівних частин $2n$ не відрізками прямих, як в методах прямокутників та трапецій, а дугами парабол, то отримаємо більш точну формулу наближеного обчислення визначеного інтегралу $\int_a^b f(x)dx$. Крок розбиття в цьому випадку обчислюється за формулою $h = \frac{b-a}{2n}$. В точках розбиття знаходимо значення підінтегральної функції y_i(де $i = 0,1, \dots ,2n$).



Замінюючи кожну пару сусідніх елементарних криволінійних трапецій з основами h однією елементарною параболічною трапецією з основою $2h$. Тоді, наприклад, на частинному відрізку $[x_0; x_2]$ парабола проходить через три точки $[x_0; y_0]$, $[x_1; y_1]$, $[x_2; y_2]$ і так далі.

Розрахункова **формула парабол** (або **Сімпсона**) для цього метода має вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} y_0 + y_{2n} + 2\sum_{i=1}^{n} y_{2i} + 4\sum_{i=1}^{n} y_{2i-1}$$

2. Завдання для самостійного виконання

Індивідуальне домашнє завдання (номер варіанта відповідає номеру у журналі)

Знайти наближене значення інтеграла за допомогою формули Сімпсона ($2n = 4$). Обчислити похибку наближення.

1.	$\int_1^6 \sqrt{2x-3}\,dx$	**6.**	$\int_1^2 x(1-x^2)^4\,dx$	**11.**	$\int_0^5 (2x-1)^5\,dx$
2.	$\int_0^5 \frac{x}{1+x^2}\,dx$	**7.**	$\int_1^2 (2x-4)^7\,dx$	**12.**	$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx$
3.	$\int_0^3 \sqrt{5x+1}\,dx$	**8.**	$\int_1^6 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx$	**13.**	$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$
4.	$\int_1^5 \frac{x^2}{1-x^3}\,dx$	**9.**	$\int_0^5 \frac{x}{1-3x^2}\,dx$	**14.**	$\int_1^4 \sqrt{8+x}\,dx$
5.	$\int_1^3 \frac{x}{(1+x^2)^3}\,dx$	**10.**	$\int_0^2 \frac{x}{(1+2x^2)^3}\,dx$	**15.**	$\int_1^7 \frac{x}{1-2x^2}\,dx$

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

1. Опрацювати теоретичний матеріал теми.
2. Виконати індивідуальне домашнє завдання в зошиті для практичних та самостійних робіт.

2.2 Зразок оформлення індивідуального домашнього завдання

Завдання. Знайти наближене значення інтеграла $\int_1^2 x^2(4-2x^3)\,dx$, за допомогою формули Сімпсона ($2n = 4$).

Розв’язання:

Обчислимо інтеграл за формулою Сімпсона: $h = \frac{2-1}{4} = 0{,}25$. Складаємо обчислювальну таблицю:

i	0	1	2	3	4
x_i	1	1,25	1,5	1,75	2
y_i	2	0,1465	-6,1875	-20,5762	-48

$I = \int_1^2 x^2(4-2x^3)\,dx \approx \frac{0{,}25}{3}(2-48+4(0{,}1465-20{,}5762)+2(-6{,}1875)) \approx -11{,}67.$

Тема 19. Застосування визначеного інтегралу до обчислення площ плоских фігур.

План

1. Теоретичні відомості.

2. Завдання для самостійного виконання.

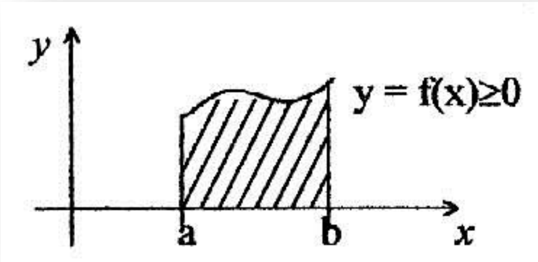
2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.

2.2 Зразок оформлення роботи.

Теоретичні відомості

площа фігури в прямокутних координатах

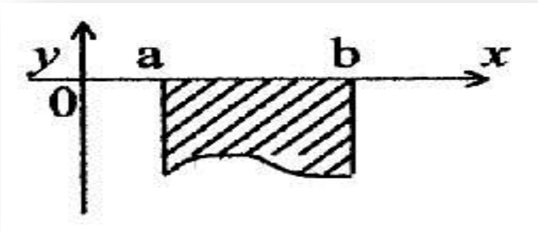
1



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

$$a < b$$

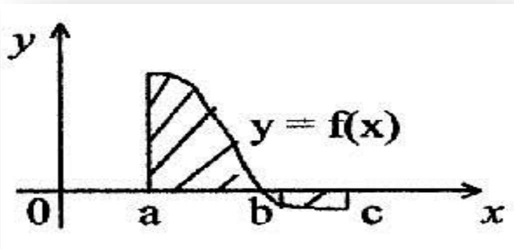
2



$$S = -\int_a^b f(x)dx = S = \int_a^b |f(x)|dx$$

$$a < b$$

3

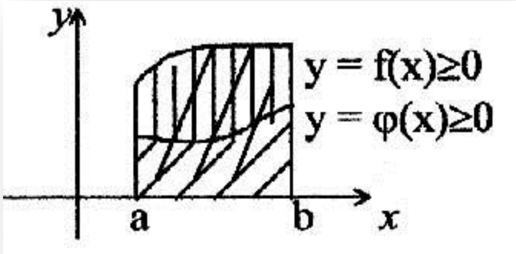


площа, обмежена кривою $y = f(x)$ та віссю $0x$.

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$

$$a < b$$

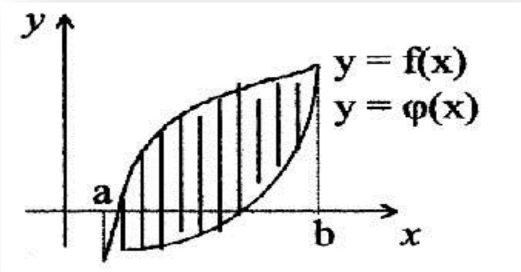
4



$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx$$

$$0 \le \varphi(x) \le f(x), \qquad a < b$$

5



$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx$$

$$\varphi(x) \le f(x)$$

2. Завдання для самостійного виконання

Індивідуальне домашнє завдання (номер варіанта відповідає номеру у журналі) Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = ax^2 + bx + c$, $y = kx + \beta$.

№ варіанта	*a*	*b*	*c*	*k*	*β*
1	-2	4	11	2	7
2	-1	-6	3	1	13
3	2	4	3	2	15
4	2	-4	5	-2	17
5	1	2	3	-1	7
6	-1	2	9	2	5
7	-1	2	11	1	9
8	3	-6	5	6	5
9	1	-4	5	-1	5
10	-1	6	5	-1	15
11	3	-6	4	3	4
12	1	-2	2	1	2
13	-1	-2	12	-2	8
14	2	12	19	2	11
15	2	-4	3	-4	11
16	-1	-6	10	1	10
17	1	2	4	-1	4
18	-1	-6	5	-2	5
19	1	-2	3	2	3
20	-1	-4	10	-1	6

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

1. Опрацювати теоретичний матеріал теми.

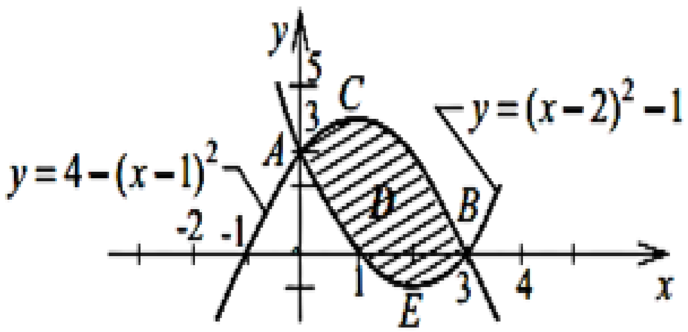
2. Виконати індивідуальне домашнє завдання в зошиті для практичних та самостійних робіт.

2.2 Зразок оформлення індивідуального домашнього завдання

Завдання. Обчислити площу фігури D, обмежену параболами $y = 2x - x^2 + 3$, $y = x^2 - 4x + 3$.

Розв'язання:

1) Побудуємо графіки заданих функцій:



2) Знайдемо точки перетину парабол, які і будуть межами інтегрування:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 + 3, \\ y = x^2 - 4x + 3; \end{cases} \Rightarrow 2x - x^2 + 3 = x^2 - 4x + 3; \ -2x^2 + 6x = 0; \ x_1 = 0, \ x_2 = 3$$

3) За формулою $S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx$, обчислюємо площу:

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 + 3 - x^2 + 4x - 3)dx = \int_0^3 (6x - 2x^2)dx = \left(3x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^3 =$$

$= 27 - 18 = 9$ (кв. од.).

Тема 20. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь.

Завдання для самостійного виконання

Використовуючи Microsoft Power Point створити проекти на тему: «Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь».

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

У мережі інтернет знайти інформацію про фізичні та геометричні задачі, що приводять до диференціальних рівнянь. Опрацювати розв'язки цих задач. Подати розв'язок задач за допомогою презентації Microsoft Power Point.

Тема 21. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь.

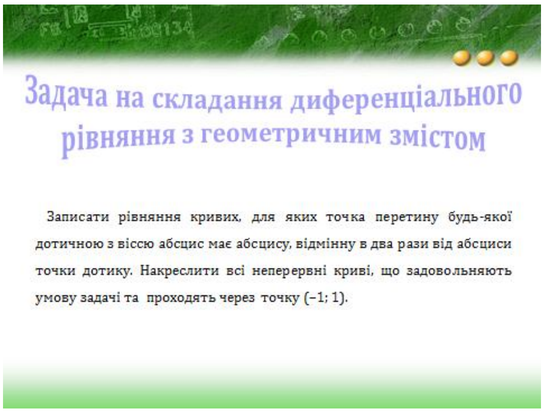
Завдання для самостійного виконання

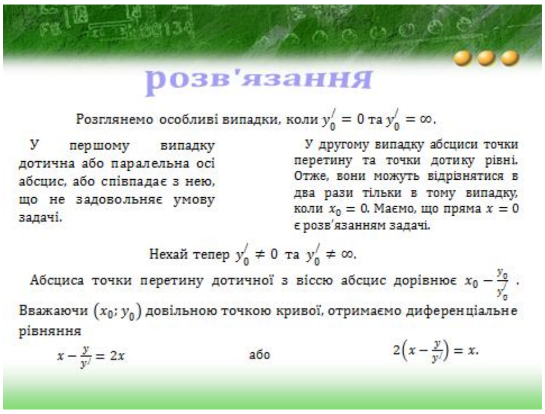
Використовуючи Microsoft Power Point створити проекти на тему: «Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь».

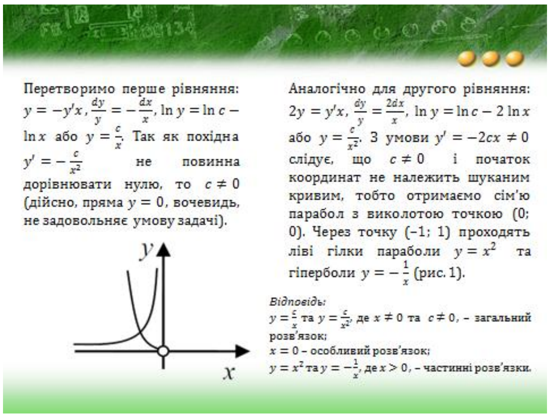
Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

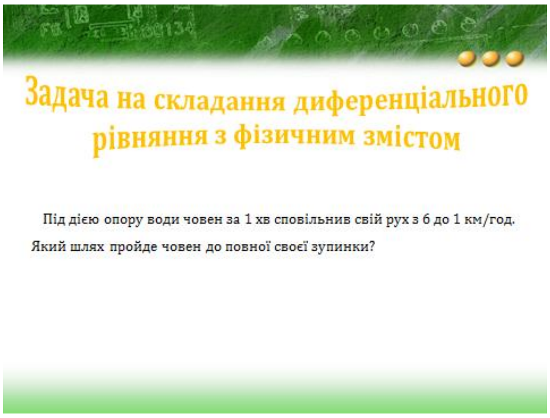
У мережі інтернет знайти інформацію про економічні задачі, що приводять до диференціальних рівнянь. Опрацювати розв'язки цих задач. Подати розв'язок задачі за допомогою презентації Microsoft Power Point.

Зразок оформлення завдання для самостійного виконання









розв'язання

Нехай $v(t)$ – це швидкість човна у момент часу t. Човен сповільнює свій рух за рахунок сили опору води, що пропорційна швидкості човна: $F_r = \mu m v$. Тоді другий закон Ньютона приводе до диференціального рівняння з відокремленими змінними $v' = -\mu v$, розв'язок якого має вигляд $v = ce^{-\mu t}$. Використавши умови $v(0) = 6$ та $v\left(\frac{1}{60}\right) = 1$, отримаємо, що $c = 6$ та $6e^{-\frac{\mu}{60}} = 1$, звідки $e^{-\mu} = 6^{-60}$.

Отже, швидкість руху човна задається рівнянням $v = 6^{1-60t}$.

З даної рівності видно, що теоретично в будь-який кінцевий момент часу швидкість човна додатна і зупинка може відбутися тільки при $t = \infty$.

І так, шлях $\int_0^{+\infty} 6^{1-60t} dt = -\frac{6^{1-60t}}{60 \ln 6}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{10 \ln 6} \approx 0{,}05581$ км, тобто трохи менше 56 м.

Відмітимо, що функція дуже швидко наближається до нуля. Наприклад, вже через 10 хв швидкість буде складати менше однієї десятої міліметра за годину, тобто практично рівній нулю. Тому при розрахунку шляху човна до його повної зупинки невласний інтеграл можна замінити визначеним $\int_0^{\frac{1}{6}} 6^{1-60t} dt$, при цьому похибка буде незначною, меншою, ніж одна тисячна міліметра.

Відповідь: 55 м 81 см.

Задача на складання диференціального рівняння з економічним змістом

Єдина хлібопекарня селища випікає і продає тисячу буханок хліба на добу вартістю 8 гривень за одну буханку. Протягом місяця 3% надходжень від реалізації хліба буде направлятися на розширення виробництва. Відомо, що подвоєння вкладень у виробництво призводить до збільшення швидкості випічки хліба у півтора рази. Скільки буханок хліба в день буде випікати пекарня до кінця місяця.

розв'язання

Нехай y кількість випеченого в момент часу t хліба, причому одиницею вимірювання часу є доба. Виторг від його реалізації складе $8y$ гривень, з яких $0{,}03 \cdot 8y = 0{,}24y$ гривень спрямовується на розширення виробництва, що призводить до збільшення швидкості випічки хліба y' у $\frac{1{,}5}{2} \cdot 0{,}24y = 0{,}18y$ разів.

Отже вірне рівняння з відокремленими змінними $y' = 0{,}18$, загальний розв'язок якого має вигляд $y = ce^{0{,}18t}$.

З умови $y(0) = 1000$ знайдемо частинний розв'язок $y = 1000e^{0{,}18t}$.

Залишається підставити $t = 30$ діб, щоб отримати кінцевий результат $y(30) = 1000e^{5{,}4} \approx 221406$ буханок хліба.

Відповідь: 221406 буханок.

Зауваження: відповідь задачі показує, що якщо навіть невеликий прибуток вкладати у виробництво дефіцитного товару, то дуже швидко можна досягти величезного зростання обсягу його випуску (експоненціальне зростання). Зрозуміло, дана модель є досить спрощеною і рідко спостерігається у реальності, так як у ній не враховується насичення ринку і зношування устаткування.

Тема 22. Диференціальні рівняння 1-го порядку: рівняння з відокремленими змінними.

План

1. Теоретичні відомості.

2. Завдання для самостійного виконання.

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.

2.2 Зразок оформлення роботи.

Теоретичні відомості

Диференціальне $y' = f(x;y)$ рівняння називається з відокремлюваними змінними, якщо можна розкласти на множники функцію $f(x;y) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ так, що один із співмножників залежить тільки від x, а другий тільки від y.

Схема розв'язання ДР з відокремленими змінними

При розв'язанні дотримуються такої послідовності.

1. Розкладаємо функцію на множники $y' = f_1(x) \cdot f_2(x)$.

2. Замінити похідну відношенням диференціалів $y' = \frac{dy}{dx}$, тоді дістанемо $\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(x)$.

3. Розділимо (відокремимо) змінні так, щоб при dy був вираз відносно y, а при dx – вираз відносно x, тобто $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$, $(f_2(y) \neq 0)$.

4. Інтегруємо кожну з частин по відповідних змінних $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$.

Якщо позначити відповідні первісні через $F_2(y)$ і $F_1(x)$, то отримаємо загальний інтеграл $F_2(y) = F_1(x) + C$.

Якщо з останньої рівності знайти y, то отримаємо загальний розв'язок.

2. Завдання для самостійного виконання

Індивідуальне домашнє завдання (кожен студент обирає два рівняння: одне – за номером у журналі, а друге – за відповідним номером в таблиці, наприклад: студент в журналі записаний під номером 3 – це перше рівняння, а друге під номером 18).

Розв'язати диференціальне рівняння з відокремленими змінними

1. $y' + y tgx = tgx$

2. $y'(1 + x^2) = 2xy$

3. $(x^2 + 1)y' = x - 4xy$

4. $(1 + x^2)y' = xy - y\sqrt{1 + x^2}$

5. $y'(y + xy) = -x - xy$

6. $y'(1 - x^2)y^2 = (x + 2)(y^2 + 1)$

16. $xy' cosy = -siny$

17. $xy' = 4(y + \sqrt{y})$

18. $(x^2 - 1)y' = -2xy$

19. $(4 - x^2)y' = -2xy$

20. $y' = 2^{x-5y}$

21. $(\sqrt{xy} - 2\sqrt{x})y' = y$

7. $y^{/} - xy^2 = 2xy$

8. $xy^{/} + y = -x^2 y$

9. $(x+1)y^{/} = -xy$

10. $2x^2 yy^{/} + y^2 = 2$

11. $(2+5e^x)yy^{/} = e^x$

12. $y^{/}e^{-y} - e^{-y} = 3$

13. $2^{x+y} + 3^{x-2y}y^{/} = 0$

14. $\sqrt{1-x^2}y^{/} = -xy^2 - x$

15. $(yx^2 - x^2)y^{/} = y^2 + xy$

22. $xyy^{/} = 1 - x^2$

23. $y^{/}tgx = y$

24. $y(4+x^2)y^{/} = x\sqrt{9-y^2}$

25. $(e^{2x}+5)y^{/} = ye^x$

26. $(x+1)^3 y^{/} = (y-2)^2$

27. $xy^{/} = y(1+lny)$

28. $y^{/}y\sqrt{5-x^2} = -\sqrt{4+y^2}$

29. $x^2(2yy^{/} - 1) = 1$

30. $y^{/}cos^2 y = sinx$

2.1 Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

1. Опрацювати теоретичний матеріал теми.
2. Виконати індивідуальне домашнє завдання в зошиті для практичних та самостійних робіт.

2.2 Зразок оформлення індивідуального домашнього завдання

Завдання. Розв'язати рівняння $xy^{/} = 2y$.

Розв'язання:

1) Замінимо $y^{/} = \frac{dy}{dx}$, отримаємо: $x\frac{dy}{dx} = 2y$;
2) відокремимо змінні: $\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$;
3) інтегруємо кожну з частин: $\int\frac{dy}{y} = 2\int\frac{dx}{x}$;
4) $\ln y = 2\ln x + \ln C \Rightarrow \ln y = \ln x^2 + \ln C \Rightarrow \ln y = \ln Cx^2 \Rightarrow y = Cx^2$.